Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Winter 2016

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	12.02.2016	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben seien die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; a^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \; a^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = [a^{(1)}\ a^{(2)}\ a^{(3)}]$.

2. Für ein Experiment betrachtet man das folgende Model

$$y = \beta_1 x + \beta_2.$$

Zur Bestimmung der Parameter $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ liegen die folgende Messungen für y_i, $i = 1, 2, 3$, vor:

x_i	2	0	-2
y_i	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$

Die Parameter β_1 und β_2 sollen bestimmt werden, so dass $\sum_{i=1}^{3} |y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)|^2$ minimal wird.

Schreiben Sie dies als ein Ausgleichungsproblem der Form

$$A\beta = b$$

und lösen Sie es mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

b) Nehmen sie an, dass die Matrizen T und D schon in Matlab eingegeben wurden, wie auch ein Spaltenvektor v der Länge 3. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der $w = A^{100}v$ berechnet. Dabei dürfen keine Potenzen von Matrizen mit ^ berechnet werden und auch keine Schleifen benutzt werden.

Siehe nächstes Blatt!

4. Sei $\mathcal{P}^4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad < 4. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^4$ in sich

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{P}^4 & \longrightarrow & \mathcal{P}^4 \\ & f(x) & \longmapsto & xf'(x) + f(x) \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben sei im Urbildraum und im Bildraum die Basis 1, x, x^2, x^3. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschreiben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1 + x$, $1 - x$, $x^2 - 1$, $1 + 2x - 2x^2 + x^3$ und im Bildraum dieselbe Basis wie in **b)**. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

5. **a)** Gegeben seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und die folgende Menge von Funktionen

$$M = \{f \in C[x_0, x_n] : f|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_2[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n\}.$$

Diese Funktionen sind stetig auf $[x_0, x_n]$ und auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ ein Polynom mit Grad < 2. Zeigen Sie: M ist ein linearer Raum (Vektorraum).

b) Nun betrachten wir die Funktionen $f_0, \ldots, f_n \in M$ mit der Eigenschaft

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{für } i, j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Zeigen Sie, dass $f_0, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind.

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r. Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $r < m$.

b) Die folgenden drei Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

Bitte wenden!

d) Gegeben seien zwei $n \times n$-Matrizen A und B. Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B, dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.

e) Die Dimension des Bildes von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt 2.

f) Sei A eine 3×3-Matrix mit 3 verschiedenen Eigenwerten. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0.$$

Es gilt: Ist y_0 ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $\lambda < 0$, so strebt $y(t)$ gegen 0 für $t \to \infty$.

g) Sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zudem sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Es gilt:

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

h) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ -2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

ist orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix.