Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Winter 2017

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

		Note
Name		
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	30.01.2017	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. **[6 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

2. **[6 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von C.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

3. **[6 Punkte]** Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}^k$ den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $< k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definiert für alle $f \in \mathcal{P}^3$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1, x, x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1 - x$, $2x$, $4x^2$ und im Bildraum die Basis 2, $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{3}$. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

4. **[6 Punkte]** Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$x = \arg\min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \tag{1}$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

Hinweis: Mit der Notation “argmin” in (1) ist das Element $x \in \mathbb{R}^2$ gemeint, welches den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{L}^2[-1,1] \times \mathcal{L}^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

6. [6 Punkte] Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungsystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Sei $\mathcal{P}^k$ wie in Aufgabe **3.** definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \to \mathcal{P}^9$ gegeben für alle $f \in \mathcal{P}^5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(xf(x)^2\right), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$