Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

Herbstsemester 2018

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 3

Aufgabe 3.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

3.1a) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A orthogonal (d. h. $AA^T = A^T A = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten b eindeutig lösbar.

(i) richtig (ii) falsch

3.1b) Die Inverse einer symmetrischen Matrix, falls sie existiert, ist symmetrisch.

(i) richtig (ii) falsch

3.1c) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3, \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Führt man den ersten Gauss-Schritt mit Pivot in der Zeile 1 aus, so erhält man die folgende augmentierte Matrix:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array}\right)$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right)$

(iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right)$

(iv) Keine der obigen drei Matrizen stellt die augmentierte Matrix nach dem ersten Gauss-Schritt dar.

Jemand erhält als Resultat der Gausselimination die augmentierte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a(1-a) & b(1-a) \end{array}\right).$$

3.1d) Wenn $b = 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

3.1e) Wenn $a \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

3.1f) Wenn $a = 2$ und $b = 1$, dann ist $(2.5, -0.5, -0.5)^\top$ die einzige Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

3.1g) Wenn $a = 1$, dann ist die Lösungsmenge $\{(1, \lambda, -\lambda)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Aufgabe 3.2

3.2a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung (mit Zeilenvertauschung).

3.2b) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 3.2a) nochmals mit Hilfe von MATLAB. Zuerst direkt mittels der Operation '\', dann mittels LR-Zerlegung '`lu`', also '`[L,R,P] = lu(A)`', und der Operation '\'.

Aufgabe 3.3

3.3a) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(AB)^T$, $A^T B^T$ und $B^T A^T$.

3.3b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, dass $C + C^T$ symmetrisch ist.

Aufgabe 3.4

3.4a) Bestimmen Sie die 3×3-Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine 3×3-Matrix A Folgendes bewirken:

(i) E_{21}: subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;

(ii) E_{31}: addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;

(iii) E_{32}: subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;

(iv) P: vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

3.4b) Seien A und R die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen M_1, M_2 und M_3, so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei M_1, M_2 und M_3 Matrizen aus Teilaufgabe 3.4a) sind.

Aufgabe 3.5 Orthogonalität einer Matrix

Eine $n \times n$-Matrix Q heisst *orthogonal*, falls $QQ^T = Q^TQ = I_n$, wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

3.5a) Sei $u = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$. Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $V := I_2 - \alpha u\, u^T$ orthogonal?

3.5b) Lösen Sie für die in 3.5a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V\,x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ohne das Gauss'sche Eliminationsverfahren zu benützen.

3.5c) Kontrollieren Sie 3.5a) und 3.5b) mit MATLAB.

Aufgabe 3.6 Householdertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die den Nullpunkt enthält. Man kann dann durch einen Normalenvektor v, der orthogonal zur Hyperebene Σ ist, die Spiegelung an der Hyperebene Σ beschreiben. Ist v als Spaltenvektor gegeben und I die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die entsprechende lineare Abbildung durch die folgende Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dargestellt:

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

3.6a) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $(vv^T)^T = vv^T$.

3.6b) Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

3.6c) Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

Abgabe:

In der Woche vom 15. Oktober 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte geben Sie dem zugeteilten Assistenten die Matlab Aufgaben ausgedruckt ab und reichen Sie diese auch Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.