Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

Herbstsemester 2018

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 4

Aufgabe 4.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.1a) Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(i) A_1 ist nicht orthogonal.

(ii) A_2 ist nicht orthogonal, aber die inverse A_2^{-1} ist es.

4.1b) Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix I_n ist. Dann gilt:

(i) A ist orthogonal und $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Aufgabe 4.2

Multiple Choice: Online abzugeben.

Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & d \\ e & 0 & f \end{bmatrix}.$$

4.2a) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $e = \frac{1}{3}$ (iii) $e = 0$ (iv) $e = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4.2b) Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(i) $a = 1, c = -1$ (ii) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ (iii) $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ (iv) Keine dieser

4.2c) Wie viele mögliche Parameterkombinationen gibt es für B?

(i) 0 (iii) 2 (v) 6 (vii) 16

(ii) 1 (iv) 4 (vi) 8 (viii) Unendliche

4.2d) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $f = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (iii) $f = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (iv) $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 4.3

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.3a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

(i) A, B, C und D sind Givens-Rotationen.

(ii) A, B und C sind Givens-Rotationen, nicht aber D.

(iii) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Uhrzeigersinn.

(iv) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Gegenuhrzeigersinn.

(v) Matrix B entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(1)}$-Achse, wobei $e^{(1)} = (1, 0, 0)^T$.

(vi) Matrix C entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(vii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

(viii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

Aufgabe 4.4

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

4.4a) Für welche Werte von α ist $A(\alpha)$ invertierbar? Berechnen Sie $(A(\alpha))^{-1}$ für diese Werte.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus (Gauss-Jordan-Algorithmus) um die Inverse zu berechnen.

4.4b) Lösen Sie das Problem $A(\alpha)x = b$ für $\alpha = 2$ und

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

4.4c) Überprüfen Sie 4.4b) mit MATLAB.

Aufgabe 4.5

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

4.5a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. Matrizen L, R und P, für welche $PA = LR$ gilt.

4.5b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit MATLAB. Lösen Sie anschliessend die Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, für

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung in MATLAB.

Hinweis: Geben sie `help lu` ein, um die MATLAB-Hilfe für den Befehl `lu` aufzurufen.

Aufgabe 4.6

Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 4.7

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Abgabe:

In der Woche vom 22. Oktober 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bitte geben Sie dem zugeteilten Assistenten die Matlab Aufgaben ausgedruckt ab und reichen Sie diese auch Online ein, wie auf der Webpage beschrieben.