Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

Herbstsemester 2018

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 5

Aufgabe 5.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

5.1a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Die Menge aller $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

(ii) Die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

5.1b) Die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

5.1c) Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^3$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

5.1d) In welchen Fällen bilden die Vektoren kein minimales Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Aufgabe 5.2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{für } i = j \text{ oder } j = n, \\ a_{ij} = -1 & \text{für } i > j, \\ a_{ij} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ durch $b = Ax$, wobei $x_i = (-1)^i$ für $i = 1, \ldots, n$. Lösen Sie mithilfe von MATLAB das Gleichungssystem $Ax = b$ für $n = 10, 20, .., 1000$ jeweils einmal mit der LR-Zerlegung und einmal mit der QR-Zerlegung. Ploten Sie die jeweiligen relativen Fehler der beiden Methoden in der Euklidischen Norm, $\frac{\|x_{lu}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$ und $\frac{\|x_{qr}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$, in einem Bild.

Hinweis: Die Matrix A können Sie mithilfe des Befehls `tril` definieren. Verwenden Sie die Befehle "`lu(A)`" und "`qr(A)`" sowie "\", um die Systeme zu lösen. Für die Euklidische Norm $\|x\|_2$ nutzen Sie "`norm(x)`". Um zwei Plots in einem Bild zu haben, betrachten Sie "`subplot`".

Aufgabe 5.3

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in V$ die Addition $x \oplus y$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V.$$

Aufgabe 5.4

5.4a) Sei V die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $V = \left\{[x, y, 2x + y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

5.4b) Ist die Menge $W = \left\{[x, 2x + 1, x]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.5

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.6

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie minimale Erzeugendensysteme im Kern und im Bild jeder dieser Matrizen.

Aufgabe 5.7

Wir betrachten den linearen Raum $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$, d.h., den Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Für alle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$c_j(x) := \cos(jx), \qquad s_j(x) := \sin(jx), \qquad e_j(x) := \exp(\mathrm{i}jx), \tag{5.7.1}$$

wobei hier $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig, sind die Unterräume

$$W_1 := \operatorname{span}\{e_{-k}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_k\} \qquad \text{und} \qquad W_2 := \operatorname{span}\{c_0, \dots, c_k, s_1, \dots, s_k\} \tag{5.7.2}$$

von V gegeben. Zeigen Sie, dass $W_1 = W_2$.

Hinweis: Es gilt $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

Aufgabe 5.8

Gegeben sei der Vektorraum der stetigen Funktionen $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$, das ist der Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Betrachten wir die drei Funktionen

$$f_1(x) = \sin(x)\,, \quad f_2(x) = \cos(x)\,, \quad f_3(x) = x\,\cos(x)\,.$$

Alle drei Funktionen sind Elemente von V. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig in V sind.

Abgabe:

In der Woche vom 29. Oktober 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.