Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

Herbstsemester 2018

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 6

Aufgabe 6.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

6.1a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 a^{(1)} + ... + \lambda_n a^{(n)} = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iv) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

(v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(vi) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

6.1b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

6.1c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

Aufgabe 6.2 Spaltenraum und Kern einer Matrix

Geben Sie, sofern möglich, für die nachfolgenden Teilaufgaben jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ an, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

6.2a) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

6.2b) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

6.2c) Der Spaltenraum von A enthält die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und eine Basis für $\operatorname{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

6.2d) Der Spaltenraum von A ist gleich dem Zeilenraum von A und $\operatorname{Kern}(A)$ wird von den Vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ aufgespannt.

Aufgabe 6.3

6.3a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

6.3b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c \\ b+c \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Aufgabe 6.4

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist natürlich nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i \text{ für } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 6.5 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern}(A)$ und $\operatorname{Bild}(A)$.

Aufgabe 6.6 Koordinatentransformation

Gegeben seien die zwei Basen $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

6.6a) Finden Sie die Basiswechselmatrix S, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechselmatrix die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

6.6b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Abgabe:

In der Woche vom 5. November 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten. Bei Schwierigkeiten wenden Sie sich an die Assistenten, oder besuchen Sie das Study Center.