

## Serie 7

### Aufgabe 7.1

**7.1a)** Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i)  $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$  mit  $x, a, b \in \mathbb{R}$

(ii)  $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$

(iii)  $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(iv)  $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$  mit  $x \in \mathbb{R}$

(v)  $\mathcal{F} : x \mapsto \exp(x)$  mit  $x \in \mathbb{R}$

(vi)  $\mathcal{F}$  nimmt eine Funktion  $f$  aus der Menge der stetigen Funktion von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{R}$ , notiert als  $\mathcal{C}([0, 1])$ , und gibt die Funktion  $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$  in  $\mathcal{C}([0, 1])$  zurück.

**7.1b)** Wir betrachten die Ebene  $E$  in  $\mathbb{R}^3$ , gegeben durch  $x_2 = x_3$ , und die lineare Abbildung  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedes  $x \in \mathbb{R}^3$  senkrecht auf  $E$  projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix  $A$ , welche  $\mathcal{F}$  bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ii) Die Matrix  $A$ , welche  $\mathcal{F}$  bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

**7.1c)** Gegeben ist ein Autokonstruktionsroboter, welcher immer die gleiche Drehung mit einem Stoss durchföhrt, um ein Element in die Karosserie einzufügen. Die dazugehörige lineare Abbildung ist  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedes  $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  auf

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

abbildet. Nun, der Roboter operiert nicht bezüglich unserer Standardbasis, sondern bezüglich der Basis  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix  $A$ , welche  $\mathcal{F}$  bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet  $\sqrt{2} \begin{bmatrix} -6.5 & -65 & -12.5 \\ 1.5 & 14 & 2.5 \\ -3.5 & -32 & -5.5 \end{bmatrix}$ .

(ii) Die Matrix  $A$ , welche  $\mathcal{F}$  bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet  $\sqrt{2} \begin{bmatrix} -16.5 & -7.5 & 17.5 \\ -14.5 & -5.5 & 14.5 \\ -23 & -10 & 24 \end{bmatrix}$ .

### Aufgabe 7.2 Koordinatentransformation zur geometrischen Interpretation

Gegeben sei der Vektorraum  $V = \mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$ .

**7.2a)** Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeföhrt. Bestimmen Sie die Matrix  $T$  der Koordinatentransformation, welche neue Koordinaten in alte überföhrt.

**7.2b)** Durch welche Matrix  $\tilde{A}$  wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in  $W = \mathbb{R}^3$  mit der neuen Basis in  $W$ ) beschrieben?

**7.2c)** Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in  $V$ ) geometrisch.

### Aufgabe 7.3 Matrixdarstellung einer linearen Polynomabbildung

Seien  $\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, t^2, t^4\}$  und  $\mathcal{U}_2 = \text{span}\{t, t^3\}$  zwei Vektorräume. Betrachten Sie die folgende Abbildung  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{G}_3$  nach  $\mathcal{U}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \mathcal{U}_2 \\ x &\longmapsto tx'' \end{aligned}$$

**7.3a)** Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}$  eine lineare Abbildung ist.

**7.3b)** Durch welche Matrix  $A$  wird  $\mathcal{A}$  beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

**7.3c)** Zeigen Sie, dass  $\{p_1, p_2, p_3\}$  und  $\{q_1, q_2\}$  Basen von  $\mathcal{G}_3$  beziehungsweise  $\mathcal{U}_2$  sind, wobei  $p_1(t) = 1 + t^2$ ,  $p_2(t) = 1 - t^2$ ,  $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$ ,  $q_1(t) = t$  und  $q_2(t) = 3t + 2t^3$ .

**7.3d)** Welches ist die neue Matrix  $B$ , die  $\mathcal{A}$  nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in Teilaufgabe 7.3c) gegeben) beschreibt?

## Aufgabe 7.4 Polynomielle Projektion

In dieser Aufgabe betrachten wir den Polynomraum  $\mathcal{P}_d([-1, 1])$  der Polynome vom Grad kleiner oder gleich  $d$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  für  $d \in \mathbb{N}$ . Er ist ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{P}_d([-1, 1]),$$

und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \dots, t \mapsto t^d\}.$$

Weiter seien die linearen Abbildungen  $\mathcal{L}_d : \mathcal{P}_d([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\mathcal{L}_d(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_d([-1, 1]).$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1).$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

**7.4a)** Geben Sie die Matrixdarstellung  $L$  von  $\mathcal{L}_2$  bezüglich der monomialen Basis von  $\mathcal{P}_2([-1, 1])$  und der Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$  an.

**7.4b)** Zeigen Sie, dass  $\langle P_i, P_i \rangle = 1$  für  $i = \{1, 2, 3\}$  und  $\langle P_i, P_j \rangle = 0$  für  $i \neq j$ .

**7.4c)** Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung  $\tilde{L}$  von  $\mathcal{L}_2$  bezüglich der Basis  $\{P_0, P_1, P_2\}$  von  $\mathcal{P}_2([-1, 1])$  und der Standardbasis des  $\mathbb{R}^2$ .

**7.4d)** Der *Rang* einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$  ist definiert als die Dimension ihres Bildes  $f(V)$  als Unterraum von  $W$  (siehe Vorlesung). Er entspricht dem Rang jeder zugehörigen Abbildungsmatrix. Was ist für allgemeines  $d$  der Rang von  $\mathcal{L}_d$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

**7.4e)** Zeigen Sie, dass für  $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{t \mapsto 1 - t^2, t \mapsto t(1 - t^2), t \mapsto t^2(1 - t^2), \dots, t \mapsto t^{d-2}(1 - t^2)\}$$

eine Basis von  $\text{Kern}(\mathcal{L}_d)$  ist.

**Hinweis:** Bestimmen Sie zunächst  $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}_d)$  mithilfe der Dimensionsformel und Teilaufgabe 7.4d). Zeigen Sie dann, dass  $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$  im Kern enthalten und linear unabhängig ist.

**7.4f)** Berechnen Sie für die Vektoren  $t \mapsto t^n \in \mathcal{P}_d([-1, 1])$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, d\}$ , die jeweiligen Orthogonalprojektionen auf  $\mathcal{P}_2([-1, 1])$ , also diejenigen Polynome in  $\mathcal{P}_2([-1, 1])$ , deren Differenz zum ursprünglichen Polynom senkrecht zu  $\mathcal{P}_2([-1, 1])$ , bezüglich dem obigen Skalarprodukt, steht.

**Hinweis:** Verwenden Sie, dass sich die Orthogonalprojektion wegen dem Resultat aus Teilaufgabe 7.4b) leicht berechnen lassen.

**Abgabe:**

In der Woche vom 12. November 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.

## Freiwillige Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind vollkommen *freiwillig* zu lösen, sind *kein* Prüfungsstoff und haben in keinerlei Hinsicht einen Einfluss auf die Bewertung. Sie sind ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere und vor allem auch schwierigere Übungsaufgaben wünschen.

### ⊛ Aufgabe 7.5 Zirkulante Matrizen

In dieser Aufgabe betrachten wir eine spezielle Menge von Matrizen, die sogenannten zirkulanten Matrizen, die in Anwendungen, zum Beispiel in der digitalen Signalverarbeitung, eine grosse Rolle spielen.

**Definition 1.** Eine quadratische Matrix  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heisst zirkulant, wenn

$$(Z)_{i,j} = \begin{cases} (Z)_{i-1,j-1} & , \text{ falls } j \in \{2, \dots, n\} , \\ (Z)_{i-1,n} & , \text{ falls } j = 1 , \end{cases} \quad \forall i \in \{2, \dots, n\} . \quad (7.5.1)$$

**7.5a)** Schreiben Sie die Menge der zirkulanten  $2 \times 2$ - und  $3 \times 3$ -Matrizen in parameterisierter Form.

**7.5b)** Wie erhält man eine Zeile bzw. Spalte einer zirkulanten Matrix aus der darüber bzw. links davon stehenden?

**Hinweis:** Bringen Sie in Erfahrung, was man unter einer [zyklischen Permutation](#) versteht.

**7.5c)** Zeigen Sie, dass die Menge  $\text{Zirk}_n$  der zirkulanten  $n \times n$ -Matrizen ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist.

**7.5d)** Bestimmen Sie eine Basis von  $\text{Zirk}_n$  und damit  $\dim \text{Zirk}_n$ .

**7.5e)** Zeigen Sie, dass

$$Z \cdot Y \in \text{Zirk}_n \quad \forall Z, Y \in \text{Zirk}_n .$$

**Hinweis:** Wenden Sie direkt Definition 1 an und betrachten Sie ein Element des Matrixprodukts mit allgemeinen Indizes  $i \geq 2$  und  $j$ . Verifizieren Sie dann durch Nachrechnen (7.5.1).

**7.5f)** Zeigen Sie, dass die Inverse einer invertierbaren zirkulanten Matrix wieder eine zirkulante Matrix ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie die  $j$ -te Spalte der Inversen  $Z^{-1}$  einer zirkulanten Matrix  $Z$ , die natürlich erfüllt, dass  $Z(Z^{-1})_{:,j} = e^{(j)}$ , wobei  $e^{(j)}$  der  $j$ -te Einheitsvektor ist. Nehmen Sie nun an, dass  $Z^{-1}$  zirkulant ist und erinnern Sie sich an Teilaufgabe 7.5b), die Ihnen sagt, wie man die  $(j+1)$ -te Spalte von  $Z^{-1}$  aus der  $j$ -ten erhält. Was müssen Sie dann für  $Z(Z^{-1})_{:,j+1}$  zeigen? Verwenden Sie für Ihre Überlegungen, dass die Inverse einer Matrix eindeutig ist.