Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 9

Aufgabe 9.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.1a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$-Matrix A, $m > n$, gegeben mit Q orthogonal und $R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, wobei $0_{(m-n)\times n}$ eine Null-Matrix bezeichne. Die Spalten von A seien linear abhängig, dann ist die $n \times n$-Matrix R_0

(i) singulär.

(ii) regulär.

(iii) nicht eindeutig regulär, oder singulär.

9.1b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalengleichungen

(i) genau eine Lösung.

(ii) unendlich viele Lösungen.

(iii) keine Lösung.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung,

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2,$$

minimal wird (lineare Regression).

9.1c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

9.1d) Die Matrix der Normalengleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

9.1e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$

(ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$

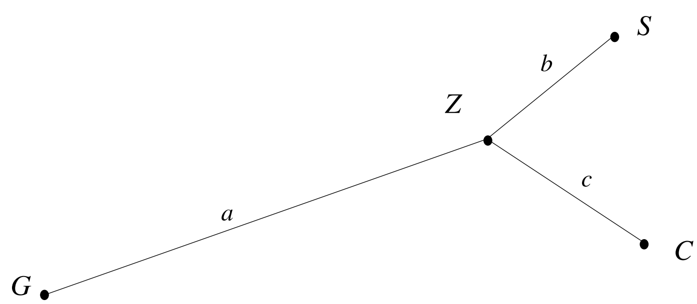
(iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Aufgabe 9.2

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht.

9.2a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalengleichungen.

9.2b) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in MATLAB.

9.2c) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\\'-Operator in MATLAB.

Aufgabe 9.3 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, das heisst, zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle v^{(i)}, v^{(i)} \rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind
- und eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 9.4 Kritischer Vergleich: QR-Algorithmus und Gram-Schmidt-Verfahren

In der Vorlesung haben wir die Householder Transformation verwendet um die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu bestimmen. Ein weiteres, sehr intuitives Verfahren, das sukzessive die Spalten $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_i \in \mathbb{R}^m$, von A orthogonalisiert, ist das Gram-Schmidt-Verfahren. Die folgenden Algorithmen (in Pseudo-Code) liefern eine QR-Zerlegung nach dem *Gram-Schmidt-Verfahren* und dem *modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren*:

Gram-Schmidt:

$Q = 0_{m \times m}$
for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  $v_j = A_{:j}$
  for $i = 1, \ldots, j-1$ **do**
    $R_{ij} = Q_{:i}^\top A_{:j}$
    $v_j = v_j - R_{ij} Q_{:i}$
  end for
  $R_{jj} = \|v_j\|_2$
  $Q_{:j} = \frac{v_j}{R_{jj}}$
end for

Modifiziertes Gram-Schmidt:

$V = A$
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $R_{ii} = \|V_{:i}\|_2$
  $Q_{:i} = \frac{V_{:i}}{R_{ii}}$
  for $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    $R_{ij} = Q_{:i}^\top V_{:j}$
    $V_{:j} = V_{:j} - R_{ij} Q_{:i}$
  end for
end for

- Vervollständigen Sie die Matlab-Datei `GramSchmidtQR.m`, wie folgt. Initialisieren Sie die Matrix $Z \in \mathbb{R}^{50 \times 50}$ mit den Einträgen:

$$Z_{ij} = 1 + \min(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq 50$$

- Vergleichen Sie den numerischen Fehler der beiden Gram-Schmidt-Verfahren als auch der Matlab-internen QR-Zerlegung, welche mittels der Householder Transformation arbeitet, in Bezug auf die Orthogonalität der Spalten von Q. Nutzen Sie dazu die zwei Matlab Funktionen `GR.m` und `GRmod.m`, welche im Template enthalten sind, und auch die Matlab Funktion `qr(...)`. Den Fehler berechnen wir durch den maximalen Eintrag in $|Q^\top Q - I|$, wobei I die 50×50 - Identitätsmatrix beschreibt.
- Plotten Sie den logarithmischen Fehler $\log(|Q^\top Q - I|)$, für alle drei Methoden.

Aufgabe 9.5 Matrixpotenzen

In der Vorlesung haben wir allgemein die Konzepte "lineare Unabhängigkeit" und "Basis" in Vektorräumen betrachtet. Die meisten Beispiele bezogen sich allerdings auf den $\mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe werden wir uns mit linear abhängigen Matrizen beschäftigen.

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} , \quad \alpha \in \mathbb{R} ,$$

und Ihre Potenzen A^k, $k \in \mathbb{N}_0$, die das k-fache Produkt von A mit sich selbst bezeichnen. Es gilt die Konvention $A^0 := I_2$.

Wir definieren

$$M_k := \operatorname{span}\{A^0, A^1, \ldots, A^k\} , \quad k \in \mathbb{N} .$$

$$B_k := \{A^0, A^1, \ldots, A^k\} , \quad k \in \mathbb{N} .$$

9.5a) Mit welchem Argument kann man sofort und ohne Rechnung begründen, dass die Menge B_3 linear abhängig ist?

9.5b) Zeigen Sie, dass auch die Menge B_2 linear abhängig ist.

9.5c) Geben Sie eine Basis von M_2 an.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage, die in 9.5b) zu zeigen war.

9.5d) Was ist $\dim M_3$?

9.5e) Was ist die Dimension von M_k für beliebiges k?

Aufgabe 9.6 Cayley-Transformation von Matrizen

In dieser Aufgabe werden wir uns mit einer wichtigen Abbildung zwischen der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen und der Menge der orthogonalen Matrizen befassen und üben dabei das Rechnen mit diesen speziellen Matrizen.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $M := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A + I_n \text{ invertierbar}\}$ betrachten wir die Abbildung

$$\mathsf{C} : \left\{ \begin{array}{ccl} M & \to & \mathbb{R}^{n\times n} \\ A & \mapsto & \mathsf{C}(A) := (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \end{array} \right. . \tag{9.6.1}$$

9.6a) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in M$ gilt $\mathsf{C}(A) = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$.

9.6b) Zeigen Sie, dass für jede schiefsymmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt, dass $x^T S x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Eine $n \times n$-Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst schiefsymmetrisch, wenn sie $S^T = -S$ erfüllt.

9.6c) Zeigen Sie, dass jede *schiefsymmetrische* Matrix S in M enthalten ist, also dass $I_n + S$ invertierbar ist, wenn $S^T = -S$.

Hinweis: Verwenden Sie die Äquivalenz i) ⇔ iii) aus Satz 2.8 im Buch und die Aussage von Teilaufgabe 9.6b).

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich mit einem *Widerspruchsbeweis* lösen. Die Idee eines Widerspruchsbeweises ist die folgende:

Um eine Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ zu zeigen, macht man die Annahme, dass das *logische Gegenteil* von B gilt und gleichzeitig auch A. Dann schliesst man aus dieser Annahme eine offensichtlich falsche Aussage.

Überlegen Sie sich also zuerst, was in dieser Teilaufgabe die logischen Aussagen A und B sind und was das Gegenteil von B bedeutet.

9.6d) Zeigen Sie, dass

$$S \quad \text{schiefsymmetrisch} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{C}(S) \quad \text{orthogonal.}$$

9.6e) Zeigen Sie, dass

$$Q \in M \quad \text{orthogonal} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{C}(Q) \quad \text{schiefsymmetrisch.}$$

9.6f) Zeigen Sie, dass

$$\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) = S \quad \forall\, S \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ schiefsymmetrisch.}$$

Zusammen mit der Aussage von Teilaufgabe 9.6e) bedeutet das, dass C eine *bijektive* Abbildung zwischen den schiefsymmetrischen Matrizen und einer Teilmenge der orthogonalen Matrizen, nämlichen denen, die in M liegen, definiert.

Abgabe:

In der Woche vom 26. November 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.