Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 10

Aufgabe 10.1

Multiple Choice: Online abzugeben.

10.1a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

10.1b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

10.1c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, (iii) $\det M = \pm 1$.

10.1d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

10.1e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

10.1f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 10.1e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.2

Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 10.3

Die Runge-Funktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{10.3.1}$$

wobei c die $n + 1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

10.3a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

10.3b) Wie können Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A lösen? Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.

10.3c) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `runge_lstsq.m`, die die Lösung des Ausgleichsproblems (10.3.1) für beliebige m und n mit $m \geq n + 1$ berechnet. Plotten Sie anschliessend mithilfe der Funktion `runge_diff_degrees.m` die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$.

Aufgabe 10.4

10.4a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

10.4b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10.4c) Überprüfen Sie Ihr Resultat von Teilaufgaben 10.4a) und 10.4b) in MATLAB.

Hinweis: `[V,D] = eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix `C` in der Diagonalen von `D` und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von `V` zurück.

Aufgabe 10.5

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.5a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig`.

10.5b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

10.5c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x Folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 10.6

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.6a) Diagonalisieren Sie die Matrix, das heisst, bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

10.6b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

10.6c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10.6d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Abgabe:

In der Woche vom 3. Dezember 2018 in den jeweiligen Übungen beim *zugeteilten* Assistenten.