Dr. V. Gradinaru
K. Imeri

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

Serie 11

Bemerkung zur Serie 11:
Keine der folgenden Aufgaben muss abgegeben werden, um den Bonus auf die Endnote zu erhalten.

Aufgabe 11.1 Sherman-Morrison-Woodbury-Formel

In dieser Aufgabe üben wir die Anwendung des Matrixkalküls und das Rechnen mit Blockmatrizen im Zusammenhang mit einer wichtigen Formel für die Inverse von Matrizen, die durch die Modifikation einer invertierbaren Matrix durch ein Tensorprodukt (äusseres Produkt) hervorgeht.

Gegeben seien eine *invertierbare* Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, und zwei beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, für die gelte

$$1 + v^T A^{-1} u \neq 0 \,.$$

11.1a) Zeigen Sie, dass

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \,.$$

Hinweis: Machen Sie sich zuerst klar, wie man nachweist, dass eine Matrix die Inverse einer anderen Matrix ist. Danach läuft die Lösung der Aufgabe auf ein ziemlich "mechanisches" Anwenden der Rechenregeln für das Matrixprodukt hinaus. Wichtig ist, dass man sieht, wann sich bestimmte Matrixprodukte auf blosse Zahlen reduzieren, denn dann lassen sie sich natürlich mit anderen Matrixprodukten vertauschen.

11.1b) Wir betrachten nun das folgende lineare Gleichungssystem in Blockmatrixform:

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.1.1}$$

Geben Sie die Matrixnotation eines linearen Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten an, das vom Vektor x aus der Lösung von (11.1.1) erfüllt wird.

Hinweis: Das logische Vorgehen ist natürlich die Elimination von ζ.

Aufgabe 11.2 Rang-Eins Modifikation

In dieser Aufgabe sehen wir eine Möglichkeit, wie wir durch Rang-Eins-Matrizen modifizierte lineare Gleichungssysteme mit wenig Aufwand lösen können, sofern wir die Lösung der Originalgleichung kennen.

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für welche gilt $A = A^T$. Weiter nehmen wir einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und definieren die Matrizen $M_\pm := A \pm uu^T$.

11.2a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Bild}(M_\pm) \subseteq \mathrm{Bild}(A) + \mathrm{Bild}(uu^T)\,.$$

Bemerkung: Wir nehmen an, dass $\mathrm{Rang}\, A = m \leq n$. Bedenken Sie, dass $\mathrm{Rang}\, uu^T = 1$, da $\dim \mathrm{Kern}(uu^T) = \dim \mathrm{Kern}(u^T) = n - 1$. Dann folgt aus der Aufgabe, dass $\mathrm{Rang}\, M_\pm \leq m + 1$.

11.2b) Zeigen Sie, dass $M_\pm$ invertierbar ist, sofern gilt, dass A invertierbar ist und $u^T A^{-1} u \notin \{-1, 1\}$.

Hinweis: Die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel könnte hier sehr hilfreich werden.

11.2c) Für gegebene Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ und rechte-Seite-Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ soll u so bestimmt werden, dass gilt

$$M_+ x = b\,, \quad \text{oder} \quad M_- x = b\,. \tag{11.2.1}$$

Hinweis:

(1) Machen Sie den Ansatz $r := b - Ax$ und betrachten Sie die Fälle

  (a) $r = 0\,,$
  (b) $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,.$

(2) Zeigen Sie im Fall (1b), dass für ein geeignetes $u \in \mathbb{R}^n$ gelten muss: $u \in \mathrm{span}\{r\}$. Machen Sie dann den Ansatz $u := \alpha r$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) Machen Sie bei der weiteren Rechnung im Fall (1b) eine weitere Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von $r^T x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11.3 Lineare Regression in der Signalverarbeitung

Die lineare Ausgleichsrechnung spielt auch eine grosse Rolle in der modernen Signalverarbeitung, zum Beispiel, wenn es um das Ausmessen von Übertragungskanälen geht. Man erhält auf diese Weise etwa die Werte für die Gewichte in der Point-Spread-Function, die die Verzerrung von Pixelbildern in optischen Übertragungssystemen beschreibt. In dieser Aufgabe behandeln wir aber einen einfacheren, "eindimensionalen" Fall, nämlich die Störung eines zeitdiskreten Signals bei der Übertragung.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Signal, welches gegeben ist durch die Folge von Werten $x_1, \ldots, x_m$, $m \in \mathbb{N}$, die die Signalamplituden zu festen Abtastzeitpunkten angeben. Diese Signale werden durch einen *linearen* Übertragungkanal (in Abbildung 11.1 mit einem blauen Pfeil symbolisiet) geschickt, wobei vorher und nachher "Funktstille" herrscht.

Leider ist der Kanal nicht perfekt, so dass sich zeitlich benachbarte Signalwerte gegenseitig beeinflussen, ein Phänomen, das man als Übersprechen bezeichnet. Daher besteht das am anderen Ende des Kanals empfangene Signal aus einer anderen Folge von Werten $y_1, \ldots, y_m$.

Der Zusammenhang zwischen dem empfangenen und gesendeten Signal ist näherungsweise gegeben durch

$$y_i = \beta x_{i-1} + \alpha x_i + \beta x_{i+1}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{11.3.1}$$

wobei wir annehmen, dass gilt $x_0 = x_{m+1} = 0$.

Die Aufgabe besteht nun darin, die unbekannten Übersprechparameter α und β aus den *gemessenen* Signalen zu ermitteln und zwar durch Lösen eines überbestimmten linearen Gleichungssystems mit der Methode der kleinsten Quadrate aus der Vorlesung.

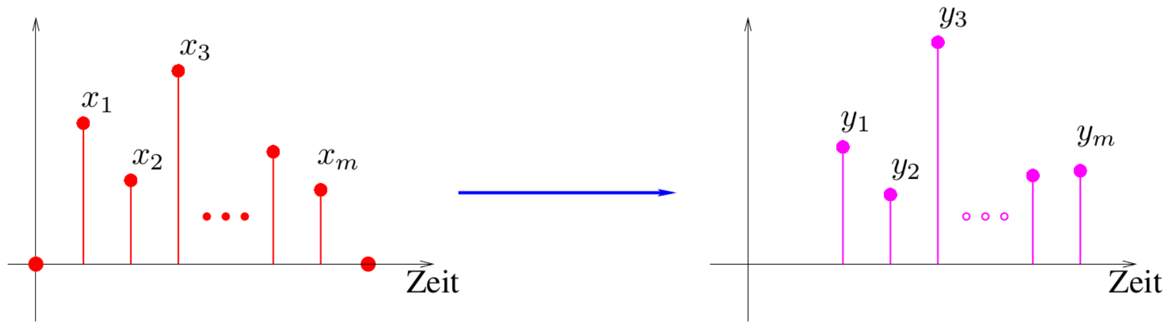

Abbildung 11.1: Übertragungskanal und zeitdiskrete Signale auf Senderseite (links) und Empfängerseite (rechts)

11.3a) Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem für das Schätzproblem auf.

Hinweis: Die Herausforderung besteht darin, die Koeffizientenmatrix A, die Unbekannten x und die rechte Seite b aus (11.3.1) richtig zu identifizieren. Dabei ist Vorsicht geboten, denn die Notation in (11.3.1) kann leicht in die Irre führen; die x_i sind keine Unbekannten!

11.3b) Geben Sie die Normalengleichungen für das überbestimmte lineare Gleichungssystem aus Teilaufgabe 11.3a) an. Geben Sie die Einträge der Matrix der Normalengleichung explizit an.

11.3c) Für welche Signale $x_1, x_2, \ldots, x_m$ können wir keine eindeutige Kleinste-Quadrate-Lösung erwarten? Hier geben theoretische Resultate aus der linearen Algebra dem Ingenieur Hinweise darauf, wie der die Messung durchzuführen hat.

Hinweis: Erinnern Sie sich an eine Bedingung an die Systemmatrix, die die Eindeutigkeit der Kleinste-Quadrate-Lösung sicherstellt.

Überlegen Sie sich dann, wann die Matrix des überbestimmten Gleichungssystems aus Teilaufgabe 11.3a) keinen vollen Spaltenrang hat. Dies führt auf ein Eigenwertproblem.

Um Eigenvektoren zu finden, probieren Sie schliesslich Eingangssignale der Form

$$x^\ell = (x_j^\ell)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m \,, \quad \ell \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{mit} \quad x_j^\ell := \sin\left(\pi \frac{j\ell}{m+1}\right) \,, \quad j = 1, \ldots, m \,.$$

Aufgabe 11.4 Lineare Rekursion: Das Räuber-Beute-Modell

Eine Anwendung linearer Rekursionen ist die Vorhersage der dynamischen Entwicklung der Altersstruktur einer Population. Darüber hinaus sind lineare Rekursionen sehr wichtig für die mathematische Modellierung von Populationsdynamik, denn die natürlichen Rhythmen von Tag und Nacht und Jahreszeiten legen eine Entwicklung in Zeitschritten nahe.

Um qualitative und quantitative Vorhersagen aus solchen Modellen zu treffen, ist die Diagonalisierung der Rekursionsmatrix das entscheidende Hilfsmittel. Dieses Werkzeug stellt die lineare Algebra bereit.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Räuber-Beute-Modell, welches repräsentiert wird durch die parameterabhängigen Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{3}{5}p_k + \frac{1}{5}q_k\,, \\ q_{k+1} &= -\alpha p_k + \frac{6}{5}q_k\,, \end{aligned} \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{11.4.1}$$

wobei p_k die Population der Räuber und q_k die Population der Beute zum Zeitpunkt t_k darstellt, und in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\alpha \in [0, 1]$. Offensichtlich impliziert das Modell (11.4.1)

- ein exponentielles Wachstum der Beutepopulation, wenn keine Räuber vorhanden sind (Koeffizient $\frac{6}{5}$),
- eine exponentielle Abnahme der Räuberpopulation, falls es keine Beutetiere gibt (Koeffizient $\frac{3}{5}$),
- ein reduziertes Wachstum oder sogar ein Schrumpfen der Beutepopulation in Gegenwart von vielen Räubern (Koeffizient $-\alpha$),
- eine weniger starke Abnahme oder sogar eine Zunahme der Räuberpopopulation, wenn viele Beutetiere vorhanden sind (Koeffizient $\frac{3}{5}$).

Zum Zeitpunkt t_0 seien die Anfangswerte gegeben durch $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$.

11.4a) Stellen Sie das Räuber-Beute Modell in der Form einer linearen Rekursion gemäss

$$x^{k+1} = Ax^k \tag{11.4.2}$$

dar, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $x^k \in \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

11.4b) Für welche(n) Wert(e) von α gibt es $\left[\begin{smallmatrix} p_0 \\ q_0 \end{smallmatrix}\right] \neq 0$ so, dass $p_k = p_0$ und $q_k = q_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

Hinweis: Natürlich muss man nur herausfinden, wann $p_1 = p_0$ und $q_1 = q_0$. Die Berechnung von Eigenwerten ist für diese Teilaufgabe nicht notwendig.

11.4c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [0, \frac{9}{20})$.

11.4d) Analysieren Sie das Verhalten von (p_k, q_k) für $t_k \to \infty$ in Abhängigkeit des reellen Parameters $\alpha > 0$. Genauer, für welche Werte von $\alpha \in (0, \frac{9}{20})$ gilt $p_k^2 + q_k^2 < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Startwerte $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$?

Hinweis: Man hat die Beträge aller Eigenwerte der Rekursionsmatrix in Abhängigkeit vom Parameter zu inspizieren.

11.4e) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [p,q] = raeuber_beute_modell( alpha ),
```

welche einen konkreten reellen Wert $\alpha > 0$ als Eingabe nimmt und das Verhalten des Räuber-Beute Modells über eine lange Zeitdauer $[0, t_{100}]$ *simuliert*, wobei $t_k = 0.1 \cdot k$. Als Startwerte wählen wir $x^0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 600 \end{bmatrix}$. Die Funktion soll die Werte für p_k, q_k über diesen Zeitraum plotten und $x^{100} = \left[\begin{smallmatrix} p^{100} \\ q^{100} \end{smallmatrix}\right]$ zurückgeben. Überprüfen Sie so Ihre Berechnungen in Teilaufgabe 11.4d).

Aufgabe 11.5 Die Spur diagonalisierbarer Matrizen

In dieser Aufgabe lernen wir eine spezielle Funktion auf dem Raum der quadratischen Matrizen kennen, die *Spur*. Sie steht in enger Beziehung zum Spektrum einer Matrix.

Die Spur einer quadratischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\operatorname{Spur} M := \sum_{j=1}^{n} (M)_{j,j} \,. \tag{11.5.1}$$

11.5a) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \,:\, \operatorname{Spur} M = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n} \,.$$

Hinweis: Sie können U als Kern einer “Matrix” charakterisieren. Dann sieht man, dass diese Matrix nur ein Zeilenvektor ist.

11.5b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur} BC = \operatorname{Spur} CB \,, \quad \forall\, B,\, C \in \mathbb{R}^{n \times n} \,. \tag{11.5.2}$$

11.5c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar, mit

$$A = S \underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1,\, \dots,\, \lambda_n)}_{=:D} S^{-1} \,, \tag{11.5.3}$$

wobei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \,. \tag{11.5.4}$$

Bemerkung: Die Identität (11.5.4) bietet ein nützliches Hilfsmittel zur Überprüfung der Korrektheit von berechneten Eigenwerten.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe 11.5b).

Aufgabe 11.6 Fourier-Matrizen

Die Tatsache, dass selbst reelle Polynome komplexe Nullstellen haben können, zwingt uns dazu, im Zusammenhang mit der Diagonalisierung von Matrizen in $\mathbb{C}$ zu rechnen. Das ist auch einer der tieferen Gründe für die grosse Bedeutung komplexer Zahlen in Wissenschaft und Technik. Machen Sie also nicht Ihren Mathematikprofessor dafür verantwortlich, dass Sie sich mit komplexen Zahlen herumschlagen müssen, sondern die Weigerung mancher reeller Polynome, ausschliesslich reelle Nullstellen zu haben.

Eine sehr wichtige Familie komplexer Matrizen sind die *Fouriermatrizen* $F^n = (F^n_{kl})^n_{k,l=1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$F^n_{kl} := \exp\!\left(\frac{2\pi i}{n} (k-1)(l-1) \right) , \quad 1 \le k, l \le n \,.$$

Dabei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$).

11.6a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$F_n^H F_n = n \cdot I_n \ ,$$

wobei das hochgestellte H die komplex konjugierte Transponierte einer Matrix bezeichnet (die *hermitesch Transponierte*).

Hinweis: Aus der Analysis sollten die folgenden Rechenregeln für die komplexe Exponentialfunktion bekannt sein:

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i k) &= 1 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z} \ , \\ \exp(kz) &= (\exp(z))^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C} \ , \\ \overline{\exp(z)} &= \exp(\overline{z}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \ . \end{aligned}$$

Erinnern Sie sich ausserdem an die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

11.6b) Mit welcher komplexen Zahl muss man F_n multiplizieren, um eine *unitäre* Matrix zu erhalten?

11.6c) Es bezeichne $e^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ den k-ten Einheitsvektor. Die *zyklische Permutationsmatrix* $P_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert durch

$$P_n = [e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots, e^{(n-1)}, e^{(n)}, e^{(1)}] \ .$$

Zeigen Sie, dass diese Matrix durch die Fouriermatrix diagonalisiert wird, dass es also eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so gibt, dass

$$P_n F_n = F_n D \ .$$

Bestimmen Sie auch die Diagonaleinträge von D.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $AS = SD$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, genau dann wenn die Spalten s^l, $l = 1, \ldots, n$, von S erfüllen, dass

$$As^l = \lambda_l s^l \ , \quad l = 1, \ldots, n \ .$$

Aufgabe 11.7 Orthogonalität von Eigenvektoren normaler Matrizen

Satz 7.4 im Buch garantiert die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, die zu *verschiedenen Eigenwerten* von A gehören. Für eine spezielle Klasse von Matrizen, nämlich die *normalen* Matrizen, kann man eine viel stärkere Aussage einfach beweisen, nämlich den folgenden Satz:

Satz. Erfüllt die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Bedingung

$$AA^H = A^H A \ , \tag{11.7.1}$$

ist sie also vertauschbar mit ihrer konjugiert Transponierten A^H, so sind jeweils zwei Eigenvektoren, die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören, *orthogonal*.

Beachten Sie, dass wir in dieser Aufgabe konsequent mit komplexen Matrizen und Vektoren rechnen.

11.7a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix, die (11.7.1) erfüllt, gilt:

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Kern}(A^H) \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Rechenregeln für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$.

11.7b) Zeigen Sie, dass aus der Eigenschaft (11.7.1) der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ folgt:

$$(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^H = (A - \lambda I_n)^H (A - \lambda I_n) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} .$$

Hinweis: Für komplexe Matrizen gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Matrizen.

11.7c) Beweisen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von A^H ist und umgekehrt.

Hinweis: Aus der Definition von Eigenvektoren wissen wir, dass sie Elemente des Kerns von bestimmten Matrizen sind. Diese Matrizen sind uns bereits in der vorherigen Teilaufgabe begegnet. Geht Ihnen ein Licht auf? Teilaufgabe 11.7a)!

11.7d) Beweisen Sie nun den obigen Satz unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe 11.7c).

Hinweis: Orthogonalität von zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 bedeutet: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Wir wissen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es genügt also, $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$ zu zeigen.