

# Lösungen zur Prüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen  $\times$  erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt  $-1$  Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

**WICHTIG: Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.\***

		wahr	falsch
a)	Sei $A$ eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen $a_{ij}$ , so dass $a_{ij} = 1$ wenn $i + j = n + 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Dann gilt $A = A^{-1}$ .	×	
b)	Seien $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynome mit $p(0) = 0 < q(0)$ , $p(1) > 0 = q(1)$ . Dann sind $p, q$ linear unabhängig.	×	
c)	Es gibt Matrizen $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ , so dass das Produkt $BC \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ vollen Rang (also Rang 4) hat.		×
d)	Seien $x, y$ zwei Zeilenvektoren in $\mathbb{R}^n$ . $\text{Rang}(xy^\top)$ ist genau dann gleich 0, wenn mindestens einer der Vektoren der Nullvektor ist.		×
e)	Die Summe zweier Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist nie ein Eigenvektor.	×	
f)	Zwei Einheitsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn entweder $v + w = 0$ oder $v - w = 0$ .	×	
g)	Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c, d \in \mathbb{R}^n$ . Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = c$ und $y$ eine Lösung von $By = d$ , so ist $x + y$ eine Lösung von $(A + B)z = c + d$ .		×
h)	Hat die symmetrische $2 \times 2$ -Matrix $A$ zwei verschiedene Eigenwerte strikt grösser als Null, so ist die Lösungsmenge von $(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ eine Ellipse in $\mathbb{R}^2$ .	×	
i)	Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Gilt $PP = P$ , so folgt $\text{im}(P) = E_1$ , wobei $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n   Px = x\}$ ist und $\text{im}(P)$ das Bild von $P$ bezeichnet.	×	
j)	Für jede quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $E_1 \subset \text{im}(P)$ , wobei $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n   Px = x\}$ ist und $\text{im}(P)$ das Bild von $P$ bezeichnet.	×	

\* verschiedene Serien A, B, C, D

**Bitte wenden!**

2. Gegeben seien die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- a) [3 Punkte] Finden Sie zwei verschiedene Basen von  $\mathbb{R}^3$ , die aus drei der obigen fünf Vektoren bestehen.
- b) [3 Punkte] Geben Sie eine nicht triviale Linearkombination  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5$  dieser Vektoren an (also verschieden von  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ ), welche Null ergibt.
- c) [1 Punkt] Finden Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deren Bild von den Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  aufgespannt wird.
- d) [3 Punkte] Finden Sie eine Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , deren Kern von den Vektoren  $a_1$  und  $a_4$  aufgespannt wird.

**Lösung:**

- a) Die Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  sind offensichtlich linear unabhängig, da keiner ein skalares Vielfaches des anderen ist. Unter den drei restlichen soll man zwei unterschiedliche Vektoren auswählen, welche die Menge  $\{a_1, a_2\}$  jeweils zu einer Basis erweitern. Die Vektoren  $a_1, a_2, a_i$  ( $i = 3, 4, 5$ ) bilden genau dann eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ , wenn das Gleichungssystem  $A_i x = 0$  nur die triviale Lösung besitzt, wobei  $A_i$  die Matrix  $(a_1 \ a_2 \ a_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  bezeichnet. Um dies für jedes solche System zu überprüfen, verwenden wir den Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -11/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Matrix folgt, dass  $A_3 x = 0$  unendlich viele Lösungen hat und dass  $A_4 x = 0$  und  $A_5 x = 0$  nur die triviale Lösung besitzen. Somit sind  $\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_2, a_4\}$  und  $\mathcal{B}_2 = \{a_1, a_2, a_5\}$  zwei verschiedene Basen von  $\mathbb{R}^3$ .

*Bemerkung:* Es gibt  $\binom{5}{3} = 10$  Kombinationen mit drei Vektoren aus den oben angegebenen fünf. Ist die Determinante der Matrix  $(a_i \ a_j \ a_k)$  nicht Null ( $i, j, k = 1, \dots, 5$ ), so ist die Menge  $\{a_i, a_j, a_k\}$  linear unabhängig und folglich eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Es lässt sich auf diese Weise überprüfen, dass ausser  $\{a_1, a_2, a_3\}$  alle anderen Kombinationen Basen von  $\mathbb{R}^3$  sind.

- b) Im Teil (a) wurde gezeigt, dass die Menge  $\{a_1, a_2, a_3\}$  linear abhängig ist, weil das System  $A_3 x = 0$  unendlich viele Lösungen hat. Eine nicht triviale Lösung  $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\top$  dieses Systems ergibt eine nicht triviale Linearkombination

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + 0 a_4 + 0 a_5 = 0$$

(hier wurden  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$  gesetzt). Aus dem letzten Schritt des Gauss-Algorithmus in (a) liest man ab, dass die Lösungen von  $A_3 x = 0$  von der Gestalt

$$\lambda_1 = -5t, \quad \lambda_2 = t, \quad \lambda_3 = t$$

**Siehe nächstes Blatt!**

für  $t \in \mathbb{R}$  sind. Setzt man  $t = 1$ , so erhält man  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , und somit ist

$$-5a_1 + 1a_2 + 1a_3 + 0a_4 + 0a_5 = 0$$

eine nicht triviale Linearkombination der fünf Vektoren, welche Null ergibt.

*Bemerkung:* Die Lösungsmenge des Systems  $Ax = 0$ , wobei  $A = (a_1 \ \cdots \ a_5)$  und  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_5)^\top$  sind, besteht aus allen 5-Tupeln von Skalaren, so dass die Linearkombination

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5 = 0$$

ist. Man kann den Gauss-Algorithmus aus (a) weiter führen, um zu zeigen, dass jede solche Lösung von der Gestalt

$$\lambda_1 = -5t - \frac{103}{20}s, \quad \lambda_2 = t + \frac{8}{5}s, \quad \lambda_3 = t, \quad \lambda_4 = -\frac{9}{4}s, \quad \lambda_5 = s$$

für  $t, s \in \mathbb{R}$  ist. Wenn man  $t \neq 0$  oder  $s \neq 0$  setzt, erhält man eine Linearkombination mit den gesuchten Eigenschaften.

- c) Sei  $u$  ein beliebiger Vektor in  $\text{span}\{a_1, a_2\}$ . Dann wird das Bild der Matrix  $A := (a_1 \ a_2 \ u) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  von den Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  aufgespannt. Insbesondere ist

$$A = (a_1 \ a_2 \ u) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine solche Matrix.

- d) Gesucht wird ein Vektor  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \neq 0$ , der orthogonal zu  $a_1$  und  $a_4$  ist. Aus diesem Vektor kann man eine Matrix  $B$  folgendermassen definieren:

$$B = \begin{pmatrix} u^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Die Matrix  $B$  hat die gewünschten Eigenschaften: Einerseits gilt

$$Ba_1 = (u \cdot a_1, 0, 0)^\top = (0, 0, 0)^\top,$$

wobei  $\cdot$  das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet; analog ist auch  $Ba_4 = 0$ . Wir haben gezeigt, dass  $\text{span}\{a_1, a_4\} \subset \ker B$  ist. Die zwei Vektorräume stimmen überein, denn  $\text{Rang } B = 1$ , also ist  $\dim(\ker B) = 3 - \text{Rang } B = 2$ , und als ein Unterraum mit maximaler Dimension muss  $\text{span}\{a_1, a_4\}$  gleich  $\ker B$  sein (man bemerke, dass  $\text{span}\{a_1, a_4\}$  Dimension 2 hat, da  $a_1$  und  $a_4$  linear unabhängig sind).

Wir geben nun eine explizite Matrix  $B$  an. Als  $u$  kann man in diesem Fall das Kreuzprodukt  $a_1 \times a_4$  auswählen:

$$a_1 \times a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eine Möglichkeit für  $B$  ist somit

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -5y(t) + 4y'(t). \quad (*)$$

- a) [3 Punkte] Verwandeln Sie (\*) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
- b) [4 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in a) gefundenen Systems an.
- c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von (\*) zu den Bedingungen  $y(0) = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

**Lösung:**

- a) Sei  $z(t) := y'(t)$ . Dann ist die Differentialgleichung  $y''(t) = -5y(t) + 4y'(t)$  zum System

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -5y(t) + 4z(t) \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

äquivalent. Weil  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist, ist die Dimension des Lösungsraumes gleich zwei.

- b) Das charakteristische Polynom von  $A$  ist  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ . Wir berechnen nun die Eigenwerte von  $A$ , d.h. die Nullstellen von  $P_A$ , und erhalten  $\lambda_1 = 2 + i$  und  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 2 - i$ . Da wir uns im Fall von zwei komplex konjugierten Eigenwerten (jeweils der Multiplizität 1) befinden, folgen wir dem auf der Seite 178 im Buch [“Lineare Algebra”, K. Nipp / D. Stoffer, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002] beschriebenen Lösungsvorgehen (Abschnitt “Die Behandlung komplexer Eigenwerte”). Wir bestimmen den Eigenraum von  $A$  zu einer der zwei konjugierten Nullstellen, z.B. zu  $\lambda_1 = 2 + i$ , indem wir das Gleichungssystem  $(A - \lambda_1 \mathbb{I}_2)x = 0$  lösen:

$$A - (2 + i)\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -(2 + i) & 1 \\ -5 & 2 - i \end{pmatrix}.$$

Also ist der Eigenraum  $E_{2+i} = \text{span}\{(2 - i, 5)^\top\}$ . Wir setzen

$$\alpha = \text{Re } \lambda_1 = 2, \quad \beta = \text{Im } \lambda_1 = 1, \quad u = \text{Re} \begin{pmatrix} 2 - i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v = \text{Im} \begin{pmatrix} 2 - i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Formel (8.21) auf der Seite 179 desselben Buchs ist die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen Systems

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= e^{\alpha t} \{ (a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t)) \cdot u - (a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t)) \cdot v \} \\ &= e^{2t} \left\{ (a \cos t - b \sin t) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - (a \sin t + b \cos t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

für Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist die Lösung von (\*)

$$y(t) = e^{2t} \{ (2a + b) \cos t + (a - 2b) \sin t \}.$$

- c) Die Bedingungen ergeben:

$$y(0) = 2a + b = 1 \quad \text{und} \quad y(\pi/2) = e^\pi (a - 2b) = 1.$$

Man bestimmt daraus die Werte  $a$  und  $b$  und findet anschliessend durch Einsetzen die gesuchte Lösung  $y(t) = e^{2t} \cos t + e^{2t-\pi} \sin t$ .

4. Nicht alle der folgenden Abbildungen a)–d) sind linear. Geben Sie für jede Abbildung entweder die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis an oder zeigen Sie, dass die Abbildung nicht linear ist. Bestimmen Sie zudem, welche der Darstellungsmatrizen orthogonal sind.

a) [2 Punkte]  $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , orthogonale Projektion auf den Unterraum  $\text{span}\{(1, 1)^\top\}$ ;

b) [2 Punkte]  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , Rotation um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn um den Punkt  $(1, 1)^\top$ ;

c) [3 Punkte]  $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , Projektion auf die untere Halbebene, also

$$(x, y)^\top \mapsto \begin{cases} (x, 0)^\top, & \text{falls } y > 0 \\ (x, y)^\top, & \text{sonst;} \end{cases}$$

d) [3 Punkte]  $f_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , Rotation um 180 Grad um die  $z$ -Achse, gefolgt von einer Spiegelung an der  $x$ - $y$ -Ebene.

**Lösung:** a) Für die Abbildung  $f_1$  gilt:

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{proj}_{(1,1)^\top} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|(1, 1)^\top\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei  $\cdot$  das Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet. Weil  $f_1$  sich als Produkt einer Matrix und des Arguments  $(x, y)^\top$  schreiben lässt, erkennt man sofort, dass die Abbildung linear ist. Diese Matrix ist genau die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis. Da ihre Determinante gleich Null ist, ist sie nicht orthogonal (Orthogonalmatrizen haben immer Determinante mit Betrag Eins).

b) Die Abbildung  $f_2$  bildet den Ursprung nicht auf sich ab und ist somit nicht linear.

c) Die Abbildung  $f_3$  ist nicht linear. Dies lässt sich durch die folgende Berechnung zeigen:

$$f_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = f_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ aber}$$

$$f_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) Man bezeichne durch  $S$  die Spiegelung an der  $x$ - $y$ -Ebene, d.h.  $S((x, y, z)^\top) = (x, y, -z)^\top$ . Es gilt für  $f_4$ :

$$\begin{aligned} f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= S \left( \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi & 0 \\ \sin \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = S \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= S \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = (-\mathbb{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

Aus dem selben Grund wie in (a) ist  $f_4$  linear und ihre Darstellungsmatrix ist  $-\mathbb{I}_3$ . Diese Matrix ist orthogonal, weil die Gleichung

$$(-\mathbb{I}_3)^\top \cdot (-\mathbb{I}_3) = \mathbb{I}_3$$

erfüllt ist.

**Siehe nächstes Blatt!**

5. Sei  $C([- \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$  der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[- \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und  $V$  der Untervektorraum aufgespannt von den Vektoren  $\mathcal{B} := \{1, \sin, \cos\}$ . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x)q(x) dx.$$

- a) [5 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf  $\mathcal{B}$  an, um eine Orthonormalbasis  $\hat{\mathcal{B}}$  zu erhalten.

*Hinweis:* Es gilt  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$ .

- b) [2 Punkte] Finden Sie die Matrix  $T$ , welche Koordinaten bezüglich  $\mathcal{B}$  auf Koordinaten bezüglich der Basis  $\hat{\mathcal{B}}$  aus a) abbildet, also die Übergangsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\hat{\mathcal{B}}$ .

- c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom  $p(x) = x$  orthogonal auf den Unterraum  $V$ .

### Lösung:

- a) Gegeben sind die Basisvektoren  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = \sin$  und  $f_3 = \cos$  von  $V$ , auf die das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren angewandt wird. Zuerst normieren wir  $f_1$ , um den ersten Vektor  $\hat{f}_1$  unserer Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten:

$$\hat{f}_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Nach Gram-Schmidt ergibt  $f'_2 = f_2 - \langle f_2, \hat{f}_1 \rangle \hat{f}_1$  einen Vektor, dessen Normalisierung  $\hat{f}_2$  der zweite Vektor der ONB ist:

$$\begin{aligned} f'_2 &= \sin - \overbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx\right)}^{=0, \sin \text{ ungerade}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \sin. \\ \hat{f}_2 &= \frac{f'_2}{\|f'_2\|} = \frac{\sin}{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin. \end{aligned}$$

Mit analoger Notation führen wir Gram-Schmidt weiter durch, um den dritten Vektor  $\hat{f}_3$  zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f'_3 &= f_3 - \langle f_3, \hat{f}_1 \rangle \hat{f}_1 - \langle f_3, \hat{f}_2 \rangle \hat{f}_2 \\ &= \cos - \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \overbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x dx\right)}^{=0, \text{Integrand ungerade}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \\ &= \cos - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

$$\begin{aligned}\hat{f}_3 &= \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos x - \frac{2}{\pi} \right)^2 dx \right\}^{1/2}} \cdot \left( \cos - \frac{2}{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos^2 x - \frac{4}{\pi} \cos x + \frac{4}{\pi^2} \right) dx \right\}^{1/2}} \cdot \left( \cos - \frac{2}{\pi} \right) = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \cos - \frac{2}{\pi} \right).\end{aligned}$$

Die Menge  $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3\}$  ist eine Orthonormalbasis von  $V$ .

- b) Wir schreiben zuerst die Vektoren der Basis  $\mathcal{B}$  als Linearkombinationen der Vektoren der Orthonormalbasis  $\hat{\mathcal{B}}$ :

$$\begin{aligned}f_1 &= \sqrt{\pi} \cdot \hat{f}_1 + 0 \cdot \hat{f}_2 + 0 \cdot \hat{f}_3, \\ f_2 &= 0 \cdot \hat{f}_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \hat{f}_2 + 0 \cdot \hat{f}_3, \\ f_3 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \hat{f}_1 + 0 \cdot \hat{f}_2 + \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \hat{f}_3.\end{aligned}$$

Die  $j$ -te Spalte der gesuchten Matrix  $T$  ist der Koordinatenvektor von  $f_j$  bezüglich der Basis  $\hat{\mathcal{B}}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Somit ist

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

- c) Die Projektion  $\text{proj}_V(p)$  von  $p(x) = x$  auf  $V$  ist durch

$$\text{proj}_V(p) = \langle p, \hat{f}_1 \rangle \hat{f}_1 + \langle p, \hat{f}_2 \rangle \hat{f}_2 + \langle p, \hat{f}_3 \rangle \hat{f}_3$$

gegeben. Wir berechnen die Koeffizienten: Einerseits ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\langle p, \hat{f}_1 \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \text{ und} \\ \langle p, \hat{f}_3 \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \cos x - \frac{2}{\pi} \right) dx = 0\end{aligned}$$

sind, weil die Integranden ungerade sind; für den zweiten Basisvektor hat man

$$\begin{aligned}\langle p, \hat{f}_2 \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus der Tatsache, dass der Integrand gerade ist, folgt. Es gilt also

$$\text{proj}_V(p) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \right) = \frac{4}{\pi} \sin.$$