

Lösungen zur Prüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt, unbeantwortete Fragen ergeben 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein —wir runden auf 0 auf.

WICHTIG: Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.*

		wahr	falsch
a)	Die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die einzige Matrix in $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang null.	×	
b)	Die Menge $\mathcal{B} = \{1 + 3x, 1 - 3x, x + x^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome mit Grad ≤ 2 .	×	
c)	Die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $F(x, y, z) = (x , 0)$, ist linear.		×
d)	Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann existieren eine $n \times n$ -Linksdreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonale und eine $n \times n$ -Rechtsdreiecksmatrix R , so dass $A = LR$ gilt.		×
e)	Sei $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\ker B = \{0\}$, so dass $b_{ij} = -b_{ji}$ für alle i, j ist. Dann muss n eine gerade Zahl sein. <i>Hinweis:</i> Betrachten Sie die Determinante von B .	×	
f)	Es existiert keine Matrix $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass $W^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} W = I$, wobei I die 2×2 -Einheitsmatrix bezeichnet.		×
g)	Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$, wobei I die $n \times n$ Einheitsmatrix und 0 die $n \times n$ Nullmatrix ist. Dann ist 0 kein Eigenwert von A .	×	
h)	Sei A eine 4×3 -Matrix mit $\text{Rang}(A) = 3$. Dann folgt aus $Av = Aw$, dass $v = w$ ist.	×	
i)	Bei einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ habe die Koeffizientenmatrix A einen kleineren Rang als die erweiterte Matrix des Systems. Dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.	×	
j)	Es existiert eine reguläre 11×11 -Matrix, so dass 112 ihrer Einträge gleich 1 sind.		×

* verschiedene Serien A, B, C, D

Bitte wenden!

2. Betrachten Sie die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x + 5y - 8z \\ 5x + 3y - 4z \\ -x - 3y + 8z \end{pmatrix}.$$

- a) [1 Punkt] Geben Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 an.
- b) [4 Punkte] Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1 := e_1, b_2 := e_1 + e_2, b_3 := e_2 + e_3\}$ von \mathbb{R}^3 . Finden Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{E} (d.h. die Matrix $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, welche Koordinaten bezüglich \mathcal{B} auf Koordinaten bezüglich \mathcal{E} abbildet) und ihre Inverse T^{-1} .
- c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich \mathcal{B} unter Verwendung der Übergangsmatrix T und ihrer Inversen.
- d) [3 Punkte] Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von F und eine Basis des Bildes von F , und geben Sie die jeweiligen Dimensionen an.

Lösung:

- a) Es lässt sich direkt ablesen, dass die Darstellungsmatrix $[F]_{\mathcal{B}}$ von F bezüglich der Basis \mathcal{E} wie folgt lautet:

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

- b) Die j -te Spalte der Matrix T entspricht dem Koordinatenvektor von b_j bezüglich der Standardbasis \mathcal{E} ($j = 1, 2, 3$). Das heisst:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse T^{-1} lässt sich auf verschiedene Arten berechnen; wir wenden z.B. das Gauss-Jordan-Verfahren an:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{=(T|I_3)} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{=(I_3|T^{-1})}$$

Also:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Man bemerke, dass

$$[F]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[F]_{\mathcal{E}}T. \quad (\star)$$

Nun multiplizieren wir die Matrizen in (\star) und erhalten die gesuchte Darstellungsmatrix:

$$[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 12 & -6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Wir wenden das Gauss-Verfahren auf die Darstellungsmatrix $[F]_{\mathcal{E}}$ an, um sie auf Zeilenstufenform zu bringen:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -12 & 36 \\ 0 & -16 & 48 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\ker(F) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

und die Menge, die nur aus dem Vektor $(-1, 3, 1)^{\top}$ besteht, eine Basis von $\ker(F)$. Es gilt also $\dim \ker F = 1$.

Andererseits liest man aus der Zeilenstufenform von $[F]_{\mathcal{E}}$ ab, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Bildes von F ist, denn diese Spalten von $[F]_{\mathcal{E}}$ entsprechen den Pivotspalten. Somit ist $\dim \text{Bild } F = 2$.

3. Auf $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei das folgende Skalarprodukt gegeben¹:

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(AB^\top). \quad (*)$$

- a) [3 Punkte] Sei S der Unterraum von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bestehend aus allen symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von S von ist.

- b) [3 Punkte] Wenden Sie das Gram–Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} in der gegebenen Reihenfolge an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' von S zu erhalten.

- c) [2 Punkte] Vervollständigen Sie \mathcal{B}' zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Ausdruck (*) tatsächlich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert.

Lösung: a) Der Unterraum S hat Dimension 3, denn

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : b = d \right\} = \left\langle E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und es ist nicht schwierig zu zeigen, dass diese drei Matrizen linear unabhängig sind. Nun soll man bemerken, dass

$$E_1 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad E_2 = \frac{B_1 - B_2}{2}, \quad E_3 = -\frac{B_1 - B_2}{2} + B_3.$$

Dies zeigt, dass \mathcal{B} den Unterraum S erzeugt. Weil dazu die Anzahl von Elementen in \mathcal{B} mit $\dim S$ übereinstimmt, dann muss \mathcal{B} eine Basis von S sein.

Alternative Lösung: Direkt zu zeigen, dass \mathcal{B} eine erzeugende und linear unabhängige Teilmenge von S ist.

- b) Zuerst normieren wir B_1 , um den ersten Vektor B'_1 unserer Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten:

$$B'_1 = \frac{B_1}{\|B_1\|} = \frac{1}{\text{Spur} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Gram–Schmidt ergibt $\hat{B}_2 = B_2 - \langle B_2, B'_1 \rangle B'_1$ einen Vektor, dessen Normalisierung B'_2 der zweite Vektor der ONB ist:

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \text{Spur} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B'_2 = \frac{\hat{B}_2}{\|\hat{B}_2\|} = \frac{1}{\text{Spur} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

Mit analoger Notation führen wir Gram–Schmidt weiter durch, um den dritten Vektor B'_3 zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\hat{B}_3 &= B_3 - \langle B_3, B'_1 \rangle B'_1 - \langle B_3, B'_2 \rangle B'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \text{Spur} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{6} \text{Spur} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B'_3,\end{aligned}$$

weil die Matrix schon normiert ist. Die Menge $\mathcal{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$ ist eine Orthonormalbasis von S .

- c) In der Teilaufgabe (a) hat es sich gezeigt, dass die Dimension von S gleich 3 ist; es ist ausserdem klar, dass $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4$ ist. Das heisst, um \mathcal{B}' zu einer Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ zu ergänzen, braucht man nur eine nichtsymmetrische Matrix mit Norm eins auszuwählen, die orthogonal zu S ist. Dies kann man z.B. erreichen, indem man eine normierte *schiefsymmetrische* Matrix auswählt (d.h. eine Matrix B , so dass $B^\top = -B$ ist). Tatsächlich: Wenn $A \in S$ und B schiefsymmetrisch ist, dann ist $\langle A, B \rangle = 0$, denn

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(AB^\top) = -\text{Spur}(A^\top B) \stackrel{(1)}{=} -\text{Spur}(BA^\top) = -\langle B, A \rangle \stackrel{(2)}{=} -\langle A, B \rangle,$$

wobei (1) aus der Identität $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ folgt und (2) aus der Tatsache, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist. (Alternativ kann man dies auch sofort sehen, indem man bemerkt, dass jede schiefsymmetrische Matrix orthogonal auf den Matrizen B'_1, B'_2, B'_3 steht.)

Eine konkrete schiefsymmetrische Matrix ist

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man normiert sie nun, um die vierte Matrix B'_4 unserer ONB von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ zu erhalten:

$$B'_4 = \frac{B_4}{\|B_4\|} = \frac{1}{\text{Spur} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung: Man kann irgendeine nichtsymmetrische Matrix $B_4 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wählen (nicht notwendigerweise schiefsymmetrisch) und das Gram–Schmidt'sche Verfahren fortsetzen, um eine ONB von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ zu finden.

- d) Ein Skalarprodukt muss bilinear, symmetrisch und positiv definit sein; wir überprüfen diese drei Eigenschaften. Seien A, B und C (2×2)-Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Bilinearität:** Dank der Symmetrie (siehe unten) müssen wir nur die Linearität in der ersten Komponente überprüfen:

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = \text{Spur}((\lambda A + B)C^\top) = \lambda \text{Spur}(AC^\top) + \text{Spur}(BC^\top) = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

aufgrund der Linearität der Spur.

- **Symmetrie:** Wegen der Identität $\text{Spur}(A^\top) = \text{Spur}(A)$ ist

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(AB^\top) = \text{Spur}(BA^\top) = \langle B, A \rangle.$$

Bitte wenden!

- *Positivdefinitheit*: Sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\langle A, A \rangle = \text{Spur}(AA^\top) = \text{Spur} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0,$$

und $\langle A, A \rangle = 0$ genau dann, wenn $a = b = c = d = 0$.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre entsprechenden Eigenräume.

b) [3 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

an.

c) [2 Punkte] Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + (5, 5, 5)^\top \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (**)$$

und geben Sie dessen allgemeine Lösung an.

d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von $(**)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = (-3, 4, 0)^\top$.

Lösung: a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 2 \\ -3 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5).$$

Die Eigenwerte von A , d.h. die Nullstellen von P_A , sind also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, und $\lambda_3 = 1 - 2i$. Mit dem Gauss-Verfahren bestimmen wir die entsprechenden Eigenräume:

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Also ist } E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\lambda_2 = 1 + 2i: \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -2 & 2i & 2 \\ -3 & -2 & 2i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Also ist } E_{1+2i} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\lambda_3 = 1 - 2i: \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ -2 & -2i & 2 \\ -3 & -2 & -2i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Also ist } E_{1-2i} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

b) Der Lösungsraum von $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ist dreidimensional; wir bestimmen drei linear unabhängige Lösungen. Für den Eigenwert λ_1 ist

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

eine Lösung. Aus den komplex konjugierten Eigenwerten λ_1 und λ_2 erhält man zwei linear unabhängige Lösungen, nämlich den Real- und den Imaginärteil von $e^{(1+2i)t}(0, i, 1)^\top$. Es gilt

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann sind

$$x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

die gesuchten Lösungen. Die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems ist also

$$x(t) = e^t \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \right\}.$$

- c) Wir müssen eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems finden. Offenbar hat das System eine konstante Lösung, d.h. wir machen für die partikuläre Lösung den Ansatz $x_p(t) = (\alpha, \beta, \gamma)^\top \in \mathbb{R}^3$. Nach Ersetzen in (**) gilt

$$Ax_p(t) = (-5, -5, -5)^\top.$$

Es handelt sich um ein inhomogenes lineares Gleichungssystem; wir bestimmen seine Lösung (z.B. mit Hilfe des Gauss-Verfahrens), nämlich

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung von (**) lautet also

$$x(t) = e^t \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Die Anfangsbedingung ergibt:

$$x(0) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ und $C_3 = 2$ sind.

Siehe nächstes Blatt!

5. Für die Abschätzung der Parameter A und B im Ausdruck

$$T(x, y) = Ax + By$$

werden die Messwerte T_i jeweils an den Stellen (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 6$, erfasst:

i	1	2	3	4	5
x_i	2	0	1	1	1
y_i	-2	2	-1	1	-1
T_i	4	-2	-3	-1	1

- a) [4 Punkte] Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für dieses Problem auf (d.h. die Gleichungen, die erfüllt werden müssten, wenn die Messwerte T_i an den Punkten (x_i, y_i) fehlerfrei wären) und die dazugehörigen Normalgleichungen.
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie Parameter A und B , welche die Summe der Fehlerquadrate minimieren. Sind diese Parameter eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Länge des entsprechenden minimalen Residuenvektors.

Lösung: a) Seien

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Dann ist $Tx = c$ das überbestimmte System. Die Normalgleichungen entsprechen dem System $T^\top Tx = T^\top c$, wobei

$$T^\top T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix},$$

$$T^\top c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

b) Die Normalgleichungen kann man auch als

$$A \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

ausdrücken. Man sieht direkt, dass $A = 0$ und $B = -1$ eine Lösung der Normalgleichungen ist. Weil $\text{Rang}(T) = 2$, ist die Lösung eindeutig.

Bemerkung: Das System der Normalgleichungen lässt sich natürlich auch mittels des Gaussverfahrens lösen.

c) Der Residuenvektor ist

$$Tx - c = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sein Betrag ist also

$$\|Tx - c\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$