

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt, unbeantwortete Fragen ergeben 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein —wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die einzige Matrix in $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang null.		
b) Die Menge $\mathcal{B} = \{1 + 3x, 1 - 3x, x + x^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome mit Grad ≤ 2 .		
c) Die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $F(x, y, z) = (x , 0)$, ist linear.		
d) Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann existieren eine $n \times n$ -Linksdreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonale und eine $n \times n$ -Rechtsdreiecksmatrix R , so dass $A = LR$ gilt.		
e) Sei $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\ker B = \{0\}$, so dass $b_{ij} = -b_{ji}$ für alle i, j ist. Dann muss n eine gerade Zahl sein. <i>Hinweis:</i> Betrachten Sie die Determinante von B .		
f) Es existiert keine Matrix $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass $W^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} W = I$, wobei I die 2×2 -Einheitsmatrix bezeichnet.		
g) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$, wobei I die $n \times n$ Einheitsmatrix und 0 die $n \times n$ Nullmatrix ist. Dann ist 0 kein Eigenwert von A .		
h) Sei A eine 4×3 -Matrix mit $\text{Rang}(A) = 3$. Dann folgt aus $Av = Aw$, dass $v = w$ ist.		
i) Bei einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ habe die Koeffizientenmatrix A einen kleineren Rang als die erweiterte Matrix des Systems. Dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.		
j) Es existiert eine reguläre 11×11 -Matrix, so dass 112 ihrer Einträge gleich 1 sind.		

A

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] Betrachten Sie die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x + 5y - 8z \\ 5x + 3y - 4z \\ -x - 3y + 8z \end{pmatrix}.$$

- a) [1 Punkt] Geben Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 an.
- b) [4 Punkte] Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1 := e_1, b_2 := e_1 + e_2, b_3 := e_2 + e_3\}$ von \mathbb{R}^3 . Finden Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{E} (d.h. die Matrix $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, welche Koordinaten bezüglich \mathcal{B} auf Koordinaten bezüglich \mathcal{E} abbildet) und ihre Inverse T^{-1} .
- c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich \mathcal{B} unter Verwendung der Übergangsmatrix T und ihrer Inversen.
- d) [3 Punkte] Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von F und eine Basis des Bildes von F , und geben Sie die jeweiligen Dimensionen an.

3. [10 Punkte] Auf $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei das folgende Skalarprodukt gegeben¹:

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(AB^\top). \quad (*)$$

- a) [3 Punkte] Sei S der Unterraum von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bestehend aus allen symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von S von ist.

- b) [3 Punkte] Wenden Sie das Gram–Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} in der gegebenen Reihenfolge an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' von S zu erhalten.
- c) [2 Punkte] Vervollständigen Sie \mathcal{B}' zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Ausdruck $(*)$ tatsächlich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert.

4. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre entsprechenden Eigenräume.
- b) [3 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

an.

¹Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

- c) [2 Punkte] Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + (5, 5, 5)^\top \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (**)$$

und geben Sie dessen allgemeine Lösung an.

- d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von (**) zur Anfangsbedingung $x(0) = (-3, 4, 0)^\top$.

5. [10 Punkte] Für die Abschätzung der Parameter A und B im Ausdruck

$$T(x, y) = Ax + By$$

werden die Messwerte T_i jeweils an den Stellen (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 6$, erfasst:

i	1	2	3	4	5
x_i	2	0	1	1	1
y_i	-2	2	-1	1	-1
T_i	4	-2	-3	-1	1

- a) [4 Punkte] Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für dieses Problem auf (d.h. die Gleichungen, die erfüllt werden müssten, wenn die Messwerte T_i an den Punkten (x_i, y_i) fehlerfrei wären) und die dazugehörigen Normalgleichungen.
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie Parameter A und B , welche die Summe der Fehlerquadrate minimieren. Sind diese Parameter eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Länge des entsprechenden minimalen Residuenvektors.