

ETHZ, D-MAVT  
**Basisprüfung Lineare Algebra**  
Winter 2012  
Prof. N. Hungerbühler

**Wichtige Hinweise**

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter und lassen Sie rechts einen Rand frei.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!

**1. [10 Punkte]** Gegeben seien die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, a^{(3)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, a^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a^{(5)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} & a^{(4)} & a^{(5)} \end{pmatrix}$ .

- Finden Sie drei verschiedene Basen von  $\mathbb{R}^3$ , die aus drei der obigen fünf Vektoren bestehen.
- Bestimmen Sie eine Basis von Bild  $A$  und Kern  $A$ .
- Finden Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren von  $A^\top$  erzeugten Unterraum von  $\mathbb{R}^5$ .

**2. [10 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 5 \end{pmatrix}$$

mit dem reellen Parameter  $\alpha$ .

- Bestimmen Sie  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass 4 ein Eigenwert von  $A$  mit geometrischer Vielfachheit 2 ist.
- Bestimmen Sie für dieses  $\alpha$  die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenräume von  $A$  sowie eine Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $D = T^{-1}AT$  gilt.
- Kann die Matrix  $T$  in b) orthogonal gewählt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Bemerkung:** Falls Sie a) nicht gelöst haben, dürfen Sie in b) und c) mit  $\alpha = 5$  rechnen.

**Bitte wenden!**

3. [9 Punkte] Gegeben sei der Vektorraum  $\mathcal{P}_3$  der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3 mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

und die Polynome  $p_1(x) = x^3$ ,  $p_2(x) = x^2 + x^3$ ,  $p_3(x) = x^3 - x^2 + 2$  aus  $\mathcal{P}_3$ .

- Zeigen Sie, dass  $p_1, p_2, p_3$  linear unabhängig sind.
- Wenden Sie das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf  $\{p_1, p_2, p_3\}$  an, um eine orthonormale Basis (bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) von  $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$  zu bestimmen.

4. [9 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung  $\ddot{y} = Ay$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -18 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

**Hinweis:** Verwenden Sie eine geeignete Variablentransformation  $y(t) = Tz(t)$  (Transformationsmethode).

- Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. [10 Punkte] Gegeben sei der Vektorraum  $\mathcal{P}_3$  der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3 mit der Basis  $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$  und der Vektorraum  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  der reellen  $2 \times 2$ -Matrizen mit der Basis  $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Betrachten Sie die folgenden Abbildungen:

$$\text{a) } \mathcal{F}_1 : \begin{array}{ll} \mathcal{P}_3 & \longrightarrow \mathcal{P}_3 \\ p(x) & \longmapsto p(x) + 1 \end{array}$$

$$\text{b) } \mathcal{F}_2 : \begin{array}{ll} \mathcal{P}_3 & \longrightarrow \mathcal{P}_3 \\ p(x) & \longmapsto x \cdot p'(x) + p(1) \end{array}$$

$$\text{c) } \mathcal{F}_3 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^{2 \times 2} & \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ A & \longmapsto A + A^\top \end{array}$$

Bestimmen Sie für jede dieser Abbildungen, ob sie linear ist (Antwort begründen), und falls ja, geben Sie ihre Darstellungsmatrix bezüglich der gegebenen Basis an.

**Viel Glück!**