

# Basisprüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $A^T A = \mathbb{1}_n$ .
- ✓ (b)  $AA^T = -\mathbb{1}_n$ .
- (c) Die Eigenwerte von  $A$  haben Betrag  $\leq 1$ .
- (d) Die Eigenwerte von  $A$  haben Betrag  $\geq 1$ .

**Erklärung:** Wir wissen aus der Vorlesung, dass  $A^T A = \mathbb{1}_n$  ist und die Eigenwerte Betrag genau 1 haben. Hingegen gilt  $AA^T = AA^{-1} = \mathbb{1}_n \neq -\mathbb{1}_n$ .

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

und die Unterräume  $U = \text{Kern } A$  sowie  $V = \text{Bild } A$  des  $\mathbb{R}^3$ . Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- ✓ (a)  $(-1, 2, -1)^T \in V$ .
- (b)  $(-1, 2, -1)^T \in U$ .
- (c)  $\dim U \neq 0$ .
- (d)  $U \cap V = \{0\}$ .

**Erklärung:** Durch Einsetzen prüft man sofort nach, dass  $A(-1, 2, -1)^T = (0, 0, 0)^T$  gilt. Somit sind (b) und (c) richtig. Da die ersten zwei Spalten von  $A$  offensichtlich linear unabhängig sind, hat  $V$  die Dimension 2, und wegen der Kern-Bild-Dimensionsformel muss  $U$  die Dimension 1 haben.  $U$  wird folglich von  $(-1, 2, -1)^T$  aufgespannt. Man rechnet leicht nach, dass  $(-1, 2, -1)^T$  nicht in  $V$  liegt, zum Beispiel weil die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Folglich ist (d) richtig und (a) falsch.

3. Drei der folgenden Eigenschaften sind äquivalent für Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Welche gehört nicht dazu?

- (a) 0 ist ein Eigenwert von  $A$ .
- (b)  $A$  ist singulär.
- ✓ (c)  $\text{Kern } A \neq \emptyset$ .
- (d)  $\text{Bild } A \neq \mathbb{R}^n$ .

**Erklärung:** 0 ist genau dann ein Eigenwert von  $A$ , wenn es einen Vektor  $v \neq 0$  gibt mit  $Av = 0 = 0v$ . Somit sind (a) und (b) äquivalent. (b) ist wiederum äquivalent dazu, dass der Kern von  $A$  Dimension  $> 0$  hat, und folglich auch dazu, dass das Bild von  $A$  Dimension  $< n$  hat, also (d). Der Kern von  $A$  ist hingegen niemals leer, er enthält immer 0.

**Siehe nächstes Blatt!**

4. Eine Basis des Kerns von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

✓ (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} -18 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

**Erklärung:** Der Kern von  $A$  muss aus Vektoren mit 3 Komponenten bestehen. Folglich sind (c) und (d) falsch. Durch Einsetzen stellt man direkt fest, dass  $(-18, 21, 8)^T$  im Kern von  $A$  liegt,  $(1, 2, -3)^T$  hingegen nicht, sodass (b) falsch sein muss. Weil die ersten beiden Spalten von  $A$  linear unabhängig sind, muss aufgrund der Kern-Bild-Dimensionsformel das Bild die Dimension 2 und der Kern die Dimension 1 haben. (a) ist also korrekt.

5. Eine Basis des Bildes von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

✓ (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

**Erklärung:** Elemente des Bildes von  $A$  sind Vektoren im  $\mathbb{R}^4$ , somit sind (c) und (d) falsch. Nun müssen wir den Rang von  $A$  bestimmen, und verwenden dazu den Gaußalgorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ 0 & 32 & -84 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 0 & -16 & 42 \\ 0 & 32 & -84 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 21 \\ 0 & -16 & 42 \\ 0 & 32 & -84 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist der Rang von  $A$  genau 2. (b) ist richtig, denn die beiden Vektoren sind jeweils Spalten der Matrix und linear unabhängig, somit eine Basis des Bilds. Man kann diese Antwort auch direkt aus der vorhergehenden Aufgabe folgern.

**Siehe nächstes Blatt!**

6. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist...

✓ (a) halbeinfach, aber nicht einfach.

(b) halbeinfach und einfach.

(c) einfach, aber nicht halbeinfach.

(d) weder halbeinfach noch einfach.

**Erklärung:** Da der Rang von  $A$  genau 1 ist, hat der Eigenwert 0 die geometrische Vielfachheit 2. Folglich ist  $A$  nicht einfach. Wegen  $A(1, -1, 1)^T = (-3, 3, -3)^T$  ist  $-3$  ein Eigenwert von  $A$ . Der Eigenwert 0 hat daher auch algebraische Vielfachheit 2 und  $A$  ist halbeinfach. Antwort (a) ist daher korrekt.

7. Sei  $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$  der komplexe Vektorraum der stetigen Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $f, g \in V$ , betrachte die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) Für  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $f, g \in V$  gilt  $\langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$ .

(b) Für  $f, g \in V$  gilt  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ .

(c) Für  $f, g, h \in V$  gilt  $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$  und  $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$ .

✓ (d)  $\langle f, f \rangle \geq 0$  für alle  $f \in V$ .

**Erklärung:** Aufgrund der Linearität des Integrals prüft man leicht, dass (a), (b) und (c) gelten. Beachte dabei, dass (b) für ein komplexes Skalarprodukt gar nicht gefordert ist (und fast nie gelten kann). (d) gilt hingegen nicht,  $\langle f, f \rangle$  ist im Allgemeinen nicht einmal reell. Setzt man zum Beispiel  $f(x) = e^{i\pi/4}$ , so erhält man  $\langle f, f \rangle = i$ .

**Bitte wenden!**

8. Die Orthogonalprojektion des Vektors  $v = (1, 4, 3)^T$  auf den von  $w = (0, -2, 1)^T$  aufgespannten Unterraum ist gegeben durch

✓ (a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Erklärung:** Die Orthogonalprojektion von  $v$  auf den von  $w$  aufgespannten Unterraum ist

$$P_w v = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = -w.$$

Folglich ist (a) die richtige Antwort.

9. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

hat die Signatur  $(p, n, z) =$

- (a)  $(2, 0, 1)$
- (b)  $(0, 3, 0)$
- (c)  $(3, 0, 0)$
- ✓ (d)  $(0, 2, 1)$

**Erklärung:** Das charakteristische Polynom von  $A$  ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)^3 - (-1 - \lambda) = -(\lambda + 1)[(\lambda + 1)^2 - 1] = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)\lambda.$$

Folglich sind die Eigenwerte von  $A$  gerade  $0, -1$  und  $-2$ . Somit ist die Signatur  $(0, 2, 1)$ , also ist (d) richtig.

10. Sei erneut

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

und  $B = -2A$ . Die Matrix  $B$  ist

- (a) negativ semidefinit, aber nicht negativ definit.
- (b) negativ definit.
- ✓ (c) positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.
- (d) positiv definit.

**Erklärung:** Da die Eigenwerte von  $A$  gerade  $0, -1$  und  $-2$  waren, sind die Eigenwerte von  $B = -2A$  gegeben durch  $0, 2$  und  $4$ . Folglich ist  $B$  positiv semidefinit, aber nicht positiv definit, (c) ist die richtige Antwort.

**Bitte wenden!**

11. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a) Für alle  $A \in \mathbb{R}^{228 \times 228}$  gilt  $\text{Bild } A^{2018} = \text{Bild } A$ .
- ✓ (b) Für alle  $A \in \mathbb{R}^{228 \times 228}$  gilt  $\text{Bild } A^{2018} \subseteq \text{Bild } A$  und es gibt  $A$  derart, dass  $\text{Bild } A^{2018} \neq \text{Bild } A$ .
- (c) Für alle  $A \in \mathbb{R}^{228 \times 228}$  gilt  $\text{Bild } A^{2018} \supseteq \text{Bild } A$  und es gibt  $A$  derart, dass  $\text{Bild } A^{2018} \neq \text{Bild } A$ .
- (d) Keine der obigen drei Aussagen ist richtig.

**Erklärung:** Antwort (b) ist richtig. Um den ersten Teil zu sehen, bemerke dass  $A^{2018}$  die Darstellungsmatrix ist zur 2018-fachen Komposition der Abbildung  $x \mapsto Ax$  mit sich selbst. Das Bild kann dabei in jedem Schritt höchstens kleiner werden, nicht grösser.

Wählt man nun zum Beispiel diejenige Matrix  $A$ , die genau eine 1 im oberen rechten Eintrag hat und die restlichen Einträge 0, so ist das Bild von  $A$  aufgespannt vom ersten Einheitsvektor. Man sieht aber schnell, dass  $A^2 = 0$  und somit auch  $A^{2018} = 0$  ist. Folglich ist das Bild von  $A^{2018}$  trivial und (b) folgt.



12. Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  beliebig. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Aus  $Av = av$  und  $Bv = bv$  folgt  $e^{AB}v = abv$ .

(b) Aus  $Av = \lambda v$  und  $Bw = \lambda w$  folgt  $e^{A+B}(v+w) = \lambda(v+w)$ .

✓ (c) Aus  $Av = av$  und  $Bv = bv$  folgt  $ABv = abv$ .

(d) Aus  $Av = \lambda v$  und  $Bw = \lambda w$  folgt  $(A+B)(v+w) = \lambda(v+w)$ .

**Erklärung:** Die richtige Antwort ist (c). Es gilt

$$ABv = A(bv) = bAv = bav = (ab)v.$$

(d) gilt sicher nicht: Setze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen besitzen beide den Eigenwert 0, aber  $A+B = \mathbb{1}_2$  hat nicht den Eigenwert 0.

(a) kann auf keinen Fall stimmen: Setze  $A = B = 0$  jeweils die Nullmatrix, sodass beide Matrizen nur 0 als Eigenwert haben. Dann ist  $e^{AB} = \mathbb{1}_2$ , und diese Matrix hat nur den Eigenwert 1.

Auch (b) ist unsinnig, mit der selben Wahl von Matrizen.

**13.** Die gewöhnliche Differentialgleichung dritten Grades

$$y'''(t) = -y'(t) + y(t)$$

kann übergeführt werden in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem der Form  $z'(t) = Az(t)$  mit

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ (b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Erklärung:** Setzen wir  $z_0(t) = y(t)$ ,  $z_1(t) = y'(t)$  und  $z_2(t) = y''(t)$ , so ergibt sich das DGLS

$$z'_0(t) = z_1(t)$$

$$z'_1(t) = z_2(t)$$

$$z'_2(t) = z_0(t) - z_1(t).$$

Somit ist (b) richtig.

**Siehe nächstes Blatt!**

14. Die Gleichung

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$$

beschreibt

- (a) eine Hyperbel.
- (b) eine Parabel.
- (c) zwei Geraden.
- ✓ (d) keine der drei obigen Antworten ist richtig.

**Erklärung:** Die linke Seite der obigen Gleichung entspricht der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$p_A(\lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Somit ist  $A$  positiv definit und die Gleichung beschreibt eine Ellipse. Daher ist (d) die richtige Antwort. Alternativ kann man die positive Definitheit von  $A$  auch aus dem Hurwitz-Kriterium folgern.

15. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $e^A$  gegeben durch

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

✓ (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Erklärung:** Man rechnet nach, dass

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0$$

gilt, und somit verschwinden auch alle höheren Potenzen von  $A$ . Es folgt

$$e^A = \mathbb{1}_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Antwort (d) ist richtig.

**Siehe nächstes Blatt!**

**16.** Sei  $\mathcal{C}([-1, 1])$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen. Welche der folgenden Mengen bildet einen Untervektorraum von  $\mathcal{C}([-1, 1])$ ?

- (a)  $A = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) \neq 0\}$
- ✓ (b)  $B = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) = 0\}$
- (c)  $C = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) \geq 0\}$
- (d)  $D = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) > 0\}$

**Erklärung:**  $A$  und  $D$  sind beide keine Vektorräume, da  $0$  jeweils nicht enthalten ist.

$C$  ist kein Vektorraum, weil für  $f = 1 \in C$  die Funktion  $-f$  nicht in  $C$  liegt.

Andererseits gilt für  $f, g \in \mathcal{C}([-1, 1])$  mit  $f(0) = g(0) = 0$  auch  $(f + g)(0) = 0$  und für  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch  $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = 0$ , also ist (b) abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation und folglich ein Untervektorraum von  $\mathcal{C}([-1, 1])$ .

17. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und definiere wie üblich das Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle_A := x^T A y$  für  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  bezüglich dieses Skalarprodukts ist gegeben durch

✓ (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \right\}$

**Erklärung:** Man rechnet nach, dass mit  $b_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$  und  $b_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)^T$  gilt

$$b_1^T A b_1 = 1, \quad b_1^T A b_2 = 0, \quad b_2^T A b_2 = 1.$$

Folglich ist (a) eine Orthonormalbasis. Analog verifiziert man, dass die anderen Möglichkeiten keine Orthonormalbasen sind.

**Siehe nächstes Blatt!**

18. Sei  $n > 1$ . Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .
- (b) Für alle invertierbaren  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(((A^2)^T)^{-1}) = \det(A)^{-2}$ .
- ✓ (c) Für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .
- (d) Für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

**Erklärung:** (a) und (d) sind Rechenregeln, die aus der Vorlesung bekannt sind. Auch (b) folgt aus bekannten Rechenregeln, nämlich daraus, dass  $\det(A^T) = \det(A)$  gilt,  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$  ist für  $A$  invertierbar, sowie aus (d).

Antwort (c) gilt nicht, wie man sich leicht an einem Beispiel klar machen kann. Wähle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen haben beide Determinante 0, aber deren Summe, die Einheitsmatrix, hat Determinante 1.

**19.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Standardbasis mit Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . Sei  $f$  die Spiegelung an der  $(x_1, x_2)$ -Ebene und  $g$  die Drehung um  $90^\circ$  um die  $x_2$ -Achse, welche die positive  $x_1$ -Achse auf die positive  $x_3$ -Achse abbildet. Bezeichne mit  $D_{g \circ f}$  die Darstellungsmatrix der Komposition  $g \circ f$ . Dann gilt

(a)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

✓ (b)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(d)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Erklärung:** Die Darstellungsmatrizen  $D_f$  bzw.  $D_g$  von  $f$  bzw.  $g$  sind

$$D_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $D_{g \circ f} = D_g D_f$  und durch Nachrechnen erhält man (b).

**Siehe nächstes Blatt!**



20. Sei

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 = 0\}$$

und

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ und } x_1 + x_4 = 0\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a)  $U + V = V$ .
- (b)  $\dim(U \cap V) = 1$ .
- (c)  $\dim(U + V) = 4$ .
- ✓ (d)  $\dim(U \cup V) = 3$ .

**Erklärung:** Subtrahiert man die zweite Gleichung für  $V$  von der ersten Gleichung, so erhält man die Gleichung für  $U$ . Somit ist  $V$  in  $U$  enthalten. Folglich ist  $U + V = U \neq V$ , es ist  $U \cup V = U$  und  $U \cap V = V$ . Ferner sind die beschreibenden Gleichung für  $V$  linear unabhängig und damit  $V$  von Dimension 2, während  $U$  die Dimension 3 hat. Es folgt, dass (d) gilt und die anderen Aussagen falsch sind.

**21. [10 Punkte]** Für  $a \in \mathbb{R}$  sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) **[2 Punkte]** Für welche Werte von  $a$  ist die Matrix  $A$  singulär bzw. regulär? Bestimmen Sie für  $a = 0$  das Inverse von  $A$ .
- b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie den Kern und das Bild von  $A$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- c) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie für  $a = 8$  die Eigenwerte und Eigenräume von  $A$ . Geben Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte an.

**Lösung:**

- a) Durch Entwicklung nach der zweiten Zeile und anschliessend nach der zweiten Spalte erhalten wir

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2a.$$

Also ist  $A$  genau dann singulär, wenn  $a = \frac{1}{2}$  ist, und sonst regulär.

Um für  $a = 0$  das Inverse von  $A$  zu bestimmen, verwenden wir den Gauss-Jordan-Algorithmus; wir beginnen mit

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Subtrahiert man nun die zweite Zeile von der vierten Zeile, ergibt sich

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Wir subtrahieren nun das zweifache der vierten Zeile von der ersten Zeile und erhalten

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Zuletzt addieren wir die erste Zeile zur dritten Zeile, und das Ergebnis ist

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Für  $a = 0$  ist das Inverse zu  $A$  folglich

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir haben bereits festgestellt, dass  $A$  genau dann singular ist, wenn  $a = \frac{1}{2}$  ist. Für  $a \neq \frac{1}{2}$  ist somit

$$\text{Bild } A = \mathbb{R}^4, \quad \text{Kern } A = \{0\}.$$

Sei also  $a = \frac{1}{2}$ . Die Matrix  $A$  hat dann immer noch Rang 3, zum Beispiel weil die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Folglich hat der Kern von  $A$  die Dimension 1 und das Bild von  $A$  die Dimension 3. Für eine Basis des Bilds können wir aufgrund der Invertierbarkeit der eben genannten Untermatrix die Spalten 2, 3 und 4 wählen.

Um eine Basis des Kerns zu bestimmen, bemerke, dass  $2(1, 0, -1, 1/2)^T + 2(0, 0, 1, 0)^T = (2, 0, 0, 1)^T$  gilt. Der Kern von  $A$  wird folglich durch den Vektor  $(2, 0, 2, -1)^T$  aufgespannt.

c) Das charakteristische Polynom von  $A$  berechnet sich durch Entwicklung nach der zweiten Zeile als

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 8 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^3 - 16(1 - \lambda)] \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 15). \end{aligned}$$

Folglich hat  $A$  einen doppelten Eigenwert  $\lambda_{1,2} = 1$ . Die anderen beiden Eigenwerte berechnen sich zu

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4.$$

Folglich hat  $A$  den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und die Eigenwerte  $-3$  und  $5$  jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

**Bitte wenden!**

Wir bestimmen als Nächstes den Eigenraum zum Eigenwert 1. Es ist

$$A - \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da 1 ein Eigenwert von  $A$  ist, kann diese Matrix höchstens den Rang 3 haben. Gleichzeitig ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Untermatrix mit von Null verschiedener Determinante, also hat die Matrix genau den Rang 3. Da der Vektor  $(0, 0, 1, 0)^T$  offensichtlich im Kern von  $A - \mathbb{1}_4$  liegt und der Kern eindimensional ist, wird der zugehörige Eigenraum von diesem Vektor aufgespannt. Folglich ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 genau 1.

Es ist klar, dass die Eigenwerte  $-3$  und  $5$  jeweils auch geometrische Vielfachheit 1 besitzen. Wir bestimmen die zugehörigen Eigenvektoren; es ist

$$A - (-3)\mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man stellt dann schnell fest, dass  $(-4, 0, -1, 8)^T$  im Kern liegt und somit der Eigenvektor zu  $-3$  ist.

Analog ergibt sich der Eigenvektor  $(4, 0, -1, 8)^T$  zum Eigenwert  $5$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

**22. [10 Punkte]** Betrachte für  $a \in \mathbb{R}$  das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + y_2 + ay_3 \\y_2' &= ay_2 \\y_3' &= ay_1 + y_2 - y_3.\end{aligned}$$

- a) **[4 Punkte]** Schreiben Sie das System in der Form  $y' = Ay$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  und die zugehörigen Eigenvektoren.

*Hinweis: Es stellt sich heraus, dass die Eigenvektoren unabhängig von  $a$  gewählt werden können.*

- b) **[3 Punkte]** Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems  $y' = Ay$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $y(0) = (1, 2, 3)^T$ .

- c) **[3 Punkte]** Sei nun  $a = 2$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $y' = Ay + b$  mit  $b = (1, -2, -2)^T$ .

**Lösung:** a) Durch Ablesen der Koeffizienten ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$p_A(\lambda) = (a - \lambda)(-1 - \lambda)^2 - (a - \lambda)a^2 = (a - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - a^2).$$

Damit ergibt sich als erster Eigenwert  $\lambda_1 = a$ . Die beiden anderen Eigenwerte sind

$$\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - 1 + a^2} = -1 \pm a.$$

Zum Eigenwert  $a$  ist  $(1, 1, 1)^T$  immer ein Eigenvektor; zum Eigenwert  $-1 - a$  ist  $(-1, 0, 1)^T$  immer ein Eigenvektor, und zum Eigenwert  $-1 + a$  ist  $(1, 0, 1)^T$  immer ein Eigenvektor. Dies ist unabhängig von  $a$ . Für manche Werte von  $a$  fallen Eigenwerte zusammen, nämlich genau für  $a = 0$  und für  $a = -\frac{1}{2}$ . Die Eigenvektoren sind jedoch ohnehin linear unabhängig und die zugehörigen Eigenräume dann der Spann der entsprechenden Eigenvektoren.

- b) Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ergibt sich somit zu

$$y(t) = C_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(-1-a)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{(-1+a)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ .

**Bitte wenden!**

Um das Anfangswertproblem zu lösen setzen wir  $t = 0$  ein und erhalten die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des Gauss-Algorithmus erhält man  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 1$  und  $C_3 = 0$ , also

$$y(t) = 2e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{(-1-a)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Wir haben bereits eine allgemeine Lösung des homogenen Systems bestimmt, sie ist gegeben durch

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt benötigen wir noch eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems. Dazu suchen wir uns eine stationäre Lösung, also eine Lösung von  $0 = y' = Ay + b$ . Es folgt also mithilfe des Gauss-Algorithmus aus  $b = -Ay$ , dass gilt

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**23. [10 Punkte]** Auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad  $\leq 2$  ist ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle P, Q \rangle := 2 \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-2x} dx$$

für  $P, Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

*Hinweis: Sie dürfen in allen Teilaufgaben ohne Beweis verwenden, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$*

$$2 \int_0^\infty x^n e^{-2x} dx = 2^{-n} n!$$

*gilt, wobei wie üblich  $0! = 1$  ist.*

- a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Elemente von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , die auf  $P(x) := x - 1$  orthogonal stehen.
- b) **[3 Punkte]** Eine Basis von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  ist gegeben durch  $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ . Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis  $\mathcal{C}$  aus  $\mathcal{B}$ .
- c) 1. **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  $A$  der Abbildung

$$\begin{aligned} d : V &\rightarrow V \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$ , wobei  $P'$  die Ableitung von  $P$  bezeichnet.

2. **[1 Punkt]** Bestimmen Sie eine Matrix  $S$ , für die gilt

$$\langle P, Q \rangle = [P]_{\mathcal{C}}^T S [Q]_{\mathcal{C}}.$$

Hierbei bezeichnet  $[P]_{\mathcal{C}}$  den Koordinatenvektor von  $P$  in der Basis  $\mathcal{C}$ .

3. **[2 Punkte]** Verifizieren Sie unter Verwendung von 1. und 2., dass

$$\langle\langle P, Q \rangle\rangle := \langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle + 6\langle P, Q \rangle$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.

### Lösung:

- a) Wir schreiben ein allgemeines Element von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  als  $ax^2 + bx + c$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \langle x - 1, ax^2 + bx + c \rangle &= 2 \int_0^\infty (x - 1)(ax^2 + bx + c)e^{-2x} dx \\ &= 2 \int_0^\infty (ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c)e^{-2x} dx \\ &= \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{2}(c - b) - c = \frac{a}{4} - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

Folglich sind die orthogonalen Elemente von  $x - 1$  genau

$$\{ax^2 + bx + c : a = 2c, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{2cx^2 + bx + c : b, c \in \mathbb{R}\}.$$

b) Es folgt unmittelbar aus dem Hinweis, dass

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist also  $\tilde{b}_1 = b_1 = 1$  bereits normalisiert. Im nächsten Schritt ergibt sich

$$\tilde{b}_2 = x - \langle 1, x \rangle 1 = x - \frac{1}{2}.$$

Wir bestimmen die Norm von  $\tilde{b}_2$ ,

$$\|\tilde{b}_2\|^2 = 2 \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{4}.$$

Somit erhält man die normalisierte Version  $b_2 = 2x - 1$ .

Im dritten Schritt ergibt sich

$$\tilde{b}_3 = x^2 - \langle 2x - 1, x^2 \rangle (2x - 1) - \langle 1, x^2 \rangle 1 = x^2 - (2x - 1) - \frac{1}{2} = x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

Man stellt erneut fest, dass  $\|\tilde{b}_3\| = \frac{1}{2}$  ist und es folgt der dritte Basisvektor

$$b_3 = 2x^2 - 4x + 1.$$

Wir haben also die Orthonormalbasis

$$\mathcal{C} = \{1, 2x - 1, 2x^2 - 4x + 1\}.$$

c1) Es gilt

$$\begin{aligned} d(1) &= 0, \\ d(2x - 1) &= 2, \\ d(2x^2 - 4x + 1) &= 4x - 4 = 2(2x - 1) - 2. \end{aligned}$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix  $A$  der Abbildung  $d$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**



c2) Da  $\mathcal{C}$  orthonormal ist, muss  $S = \mathbb{1}_3$  die Einheitsmatrix sein.

c3) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle\langle P, Q \rangle\rangle &= [P']_{\mathcal{C}}^T [Q]_{\mathcal{C}} + [P]_{\mathcal{C}}^T [Q']_{\mathcal{C}} + 6[P]_{\mathcal{C}}^T S [Q]_{\mathcal{C}} = [P]_{\mathcal{C}}^T A^T [Q]_{\mathcal{C}} + [P]_{\mathcal{C}}^T A [Q]_{\mathcal{C}} + 6[P]_{\mathcal{C}}^T S [Q]_{\mathcal{C}} \\ &= [P]_{\mathcal{C}}^T (A + A^T + 6S) [Q]_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

Sei also

$$T := A + A^T + 6S = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet schnell nach, dass die Eigenwerte von  $T$  gegeben sind durch einen einfachen Eigenwert  $\lambda_1 = 2$  und einen doppelten Eigenwert  $\lambda_{2,3} = 8$ . Folglich ist  $T$  symmetrisch und positiv definit, und somit  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  ein Skalarprodukt. Alternativ kann man auch das Hurwitzkriterium verwenden.