

ETHZ, D-MAVT  
**Basisprüfung Lineare Algebra I/II**  
Sommer 2011  
Prof. N. Hungerbühler

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Danach dürfen Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Verwenden Sie dabei für jede Aufgabe ein separates Blatt.

**1. [11 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 4 & 4 - 8\beta & -20 \\ -1 & 8\beta - 4 & \alpha + 9 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- a) Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  liegt der Vektor  $b = (1, -4, 3)^\top$  in Bild  $A$ ?
- b) Bestimmen Sie Rang  $A$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$ .
- c) Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist 0 ein Eigenwert von  $A$  mit geometrischer Vielfachheit 2? Bestimmen Sie für diese  $\alpha$  und  $\beta$  eine Basis von Kern  $A$  und Bild  $A$ .

**2. [9 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von  $A$ . Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.
- b) Finden Sie eine Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $D = T^{-1}AT$  gilt.
- c) Kann die Matrix  $T$  in b) orthogonal gewählt werden (Antwort begründen)? Wenn ja, geben Sie ein solches  $T$  an.

**Bitte wenden!**

3. [9 Punkte] Betrachten Sie den Vektorraum  $\mathcal{P}_3$  der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit der Basis  $\mathcal{B} = \{x^3 + 1, x^2 + x - 2, 2x + 1, x + 2\}$  und dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

- a) Welches Polynom in  $\mathcal{P}_3$  hat die Koordinaten  $(2, 1, -1, 3)^\top$  bezüglich  $\mathcal{B}$ ?
- b) Sei  $p(x) := x^3 + x^2 + x + 1$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $p(x)$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .
- c) Finden Sie eine Basis des Unterraums aller Polynome in  $\mathcal{P}_3$ , die bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  senkrecht auf  $q(x) := x$  stehen.

4. [9 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $\dot{y} = Ay$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen  $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ , für welche die zugehörigen Lösungen  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  gegen Null streben für  $t \rightarrow -\infty$  (Vorsicht: *minus*  $\infty$ ).

5. [10 Punkte] Gegeben seien die folgenden linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

- a)  $\mathcal{F}_1$ : Spiegelung an der Ebene  $x_1 = x_2$
- b)  $\mathcal{F}_2$ : Orthogonalprojektion auf die Ebene  $x_2 = 0$
- c)  $\mathcal{F}_3$ : Drehung um die  $x_3$ -Achse um 45 Grad (Rechte-Hand-Regel, d.h. im Gegenuhrzeigersinn von der positiven Seite der  $x_3$ -Achse aus gesehen)
- d)  $\mathcal{F}_4$ : Zusammengesetzte Abbildung  $\mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_1$

Geben Sie die Darstellungsmatrizen dieser Abbildungen (bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ ) an und bestimmen Sie, ob diese Matrizen orthogonal sind (Antwort begründen).

**Viel Erfolg!**