Serie 10

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 7. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Für

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ gelten welche der folgenden Aussagen?

(a) $\det(A) = 0$.

(b) Der Rang von A ist 3.

(c) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

(d) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau eine Lösung.

(e) Die Lösbarkeit von $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hängt von der Wahl von $\mathbf{v}$ ab.

(f) Die Matrix A hat eine Inverse.

2. [Prüfungsaufgabe, Frühling 07] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix A singulär?

3. *Cramersche Regel, 1750*: Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Ersetzt man die k-te Spalte von A durch b, erhält man eine Matrix A_k. Beweisen Sie, dass die Lösung von $Ax = b$ durch

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

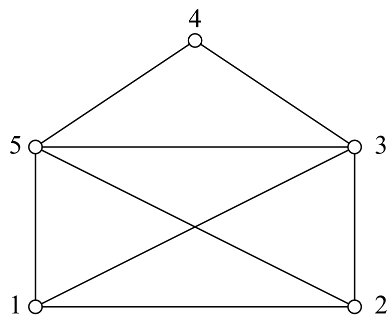
gegeben ist.

Bemerkung: Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramersche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

4. Ein Graph G mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$ wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix A^G beschrieben:

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispielsweise gehört zum Graph G :



die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei d_i der Grad des Knotens i, d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \operatorname{diag}(d_1\, d_2\, \ldots\, d_n).$$

Dann heisst $L^G := D^G - A^G$ Laplace-Operator auf G.

a) Zeigen Sie für beliebige G, dass $\det L^G = 0$ gilt.

b) Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von L^G die Anzahl der G aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.