Serie 13: Semesterendtest

Dieser Test dient der Selbsteinschätzung. Einsendeschluss: Freitag, der 22. Februar um 14:00 Uhr.

---

1. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(a) $x_1 = 1,\ x_2 = 1.$

(b) $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

(c) $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

(d) $x_1 = -1,\ x_2 = -1.$

2. Gegeben sei $Ax = b$, wobei

$$A = \left(a^{(1)} \dots a^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } b \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\right\}.$$

Dann existiert keine Lösung von $Ax = b$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Unterraums $\{x \mid Ax = 0\}$ ist gegeben durch…

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

4. Welche der folgenden drei Vektoren sind jeweils linear unabhängig?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F}$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Darin enthalten sind die Unterräume $\mathcal{P}_n(x) := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Polynome mit Grad $\leq n$. Es gilt:

(a) Die Dimension des Unterraums $\mathcal{P}_n$ ist $n+1$.

(b) Die Sinusfunktion ist Element von $\mathcal{F}$ ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume $\mathcal{P}_n$ ($\sin \notin \mathcal{P}_n$).

(c) Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(d) $1, \sin^2, \cos^2$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(e) Sind zwei Polynome $p(x), q(x)$ linear unabhängig, so auch die Polynome $xp(x), xq(x)$.

(f) Der Untervektorraum $V = \mathrm{span}\{\sin\}$ schneidet den Unterraum $\mathcal{P}_3$ nur in 0 (formal $V \cap \mathcal{P}_3 = \{0\}$) und es gilt $\dim(\mathrm{span}\{\sin, 1, x, x^2, x^3\}) = 5$.

(g) Die Abbildung $A\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ ist linear.

6. Gegeben sei die 7×7-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A ist orthogonal.

(b) A ist nicht orthogonal.

7. Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix, A eine $n \times n$–Matrix, $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2\,\mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad A\,u = v.$$

Dann folgt:

(a) Die Determinante von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte sind nicht möglich.

(b) Das lineare Gleichungssystem $A\,x = u$ hat die Lösung $x = \frac{1}{2}\,v$.

8. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) 0.

(b) -1.

(c) 2.

9. Gegeben seien zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, mit $n > 1$.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(c) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

(d) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

(e) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

(f) Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$, wobei A^T die Transponierte von A bezeichnet.

(g) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.