

Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 1

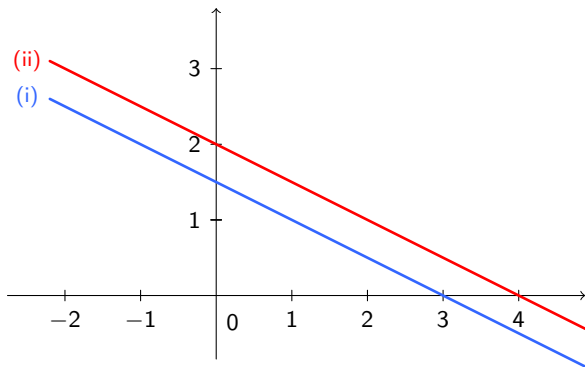
Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Denken Sie für jedes dieser Systeme über den Informationsgehalt der einzelnen Gleichungen nach: Entscheiden Sie, ohne das System zu lösen, für jedes Gleichungssystem, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen, oder keine Lösung hat. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 4$

Gleichung (i) widerspricht (ii). Die Lösungsmenge ist leer.

(a) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 4$

Geometrisch:



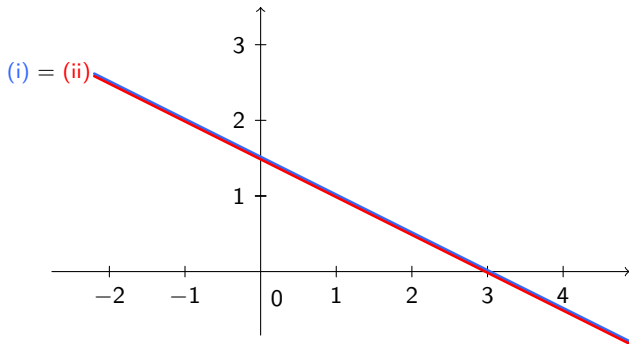
Kein Punkt liegt gleichzeitig auf beiden Geraden.

(b) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 3$

Die Gleichungen stimmen überein: Es gibt unendliche viele Lösungen, da man (i) für jeden Wert von x_2 nach x_1 auflösen kann.

(b) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden sind identisch: Jeder Punkt (x_1, x_2) auf der Gerade löst (i) und (ii).

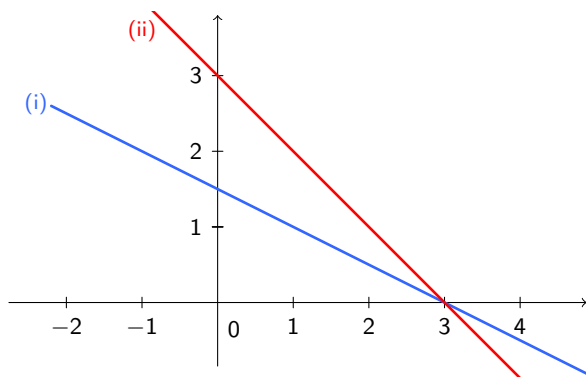
Das LGS hat je nach rechter Seite keine oder unendlich viele Lösungen.

$$(c) \quad \begin{array}{l} (i) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ (ii) \quad x_1 + x_2 = 3 \end{array}$$

Bei der Subtraktion der Gleichungen entsteht eine Gleichung für x_2 allein, mit einer eindeutigen Lösung. Danach folgt aus (i) oder (ii) eine eindeutige Lösung auch für x_1 . Dies gilt bei beliebiger rechter Seite!

(c) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt (x_1, x_2) ,
der Lösung des LGS.

- (d) (i) $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$
(ii) $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$
(iii) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

Die Gleichung (ii) folgt durch Verdoppeln aus (i) und kann daher weggelassen werden. Dann kann man x_1 beliebig wählen und es resultiert dieselbe Situation wie in (c): In Abhängigkeit von x_1 erhält man eine Lösung für x_2 und x_3 . D.h. man hat eine einparametrische Lösungsschar.

$$(e) \quad \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 = 4 \\ \text{(ii)} \quad \quad \quad 2x_3 = 8 \\ \text{(iii)} \quad 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{array}$$

Gleichung (ii) liefert einen festen Wert für x_3 . Die Gleichungen (i) und (iii) widersprechen sich nicht und haben eine eindeutige Lösung: Addiere das -2 -fache von (i) zu (iii) um x_1 zu bestimmen. Dann folgt x_2 aus (i) oder (iii). Das LGS hat unabhängig von der rechten Seite eine eindeutige Lösung.

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \text{(f)} \quad & \text{(ii)} \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 4 \\ & \text{(iii)} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{aligned}$$

Gleichung (ii) und damit das ganze LGS hat keine Lösung.

Wäre die 4 eine 0, so gäbe es unendlich viele Lösungen: (i) und (iii) liefern dann für jeden Wert von x_3 eine Lösung x_1 , x_2 (einparametrische Lösungsschar). Das LGS hat also je nach rechter Seite keine oder unendlich viele Lösungen.

$$(g) \quad \begin{array}{l} (i) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ (ii) \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ (iii) \quad 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \end{array}$$

Die Summe aus (i) und (ii) widerspricht (iii). Die Lösungsmenge ist leer.

Wäre die 8 eine 6, könnte man (iii) weglassen. Da (ii) durch Verdoppeln aus (i) entsteht, kann man auch (ii) weglassen. (i) kann dann z. B. nach x_1 aufgelöst werden, wobei x_2 und x_3 frei wählbar sind. Man bekommt eine zweiparametrische Lösungsschar.

Beobachtung: Je nach Koeffizientenmatrix A des LGS

$Ax = b$ gilt:

- ▶ Entweder das LGS hat unabhängig von b eine eindeutige Lösung, oder
- ▶ Das LGS hat, abhängig von b , keine oder eine ein- oder mehrparametrische Lösung.

Frage: Wie kann man es der Matrix A respektive b ansehen, welcher Fall vorliegt?