# Lösungen 3

**1.** Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS $Ax = b$ lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Z.B. existiert für keinen der drei Vektoren $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert immer mindestens die Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine andere Argumentation: setzt man in $Ax = b$ irgendwas für $x$ ein, so erhält man einen Vektor $b$ für den dieses $x$ eine Lösung ist.

√ (c) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

Falsch. Nimmt man für $b$ den Nullvektor, so existiert mit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung, aber $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ wird durch diese Ungleichung ausgeschlossen.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right).$$

Also gibt es eine Lösung für alle $b_1, b_2, b_3$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

**2.**

a) Für welche Werte von $t$ schneiden sich die vier Ebenen im $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 2t \\ 2(x & - & y) & + & t(z+1) & = & 0. \end{array}$$

b) Das folgende MATLAB-Script visualisiert die Lösung des LGS
$x+y-z=5$, $x-y-z=0$, $4x-z=2$.

```
ezsurfc('x+y-5')
% plottet den Graphen der Funktion z=f(x,y)=x+y-5 (Sie koennen
% auch andere (zwei) Variabelnamen waehlen)
hold on
% hold dient dazu, alle Graphen in derselben Figur anzuordnen
% (Figur nicht schliessen waehrend dem Ausfuehren der Befehle)
ezsurfc('x-y')
ezsurfc('4*x-2')
hold off
```

Ändern Sie dieses Script so ab, dass es für die im Teil **a)** gefundenen Werte von $t$ den Schnitt der vier Ebenen visualisiert.

a) Der Schnitt der Ebenen entspricht der Lösungsmenge des Gleichungssystems in den Variablen $x, y, z$ mit Parameter $t$. Mit dem Gaussverfahren erhalten wir

$$\begin{array}{rrr|r} x & y & z & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 2 & -2 & t & -t \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4t \\ 0 & -4 & t & -5t \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4t \\ 0 & 0 & t+4 & -5t \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4t \\ 0 & 0 & 0 & t(t-1) \end{array}$$

Die Verträglichkeitsbedingung $t(t-1)=0$ ist für $t=0$ und für $t=1$ erfüllt. Für $t=0$ findet man durch Rückwärtseinsetzen $z=0, y=0, x=0$. Für $t=1$ findet man durch Rückwärtseinsetzen $z=-1, y=1, x=1$. Der Schnitt der Ebenen entspricht also jeweils einem einzelnen Punkt.

b) Das folgende MATLAB-Script zeigt den Fall $t=0$:

```
% t=0
ezsurfc('0*x-z')
% "0*x" steht nur da, damit die Achsenlabels automatisch korrekt sind
hold on
ezsurfc('2*x+z')
ezsurfc('-x+0*z')
ezsurfc('x+0*z')
hold off
```

**3.**

a) Lösen Sie für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n}(i-k)x_i = 1 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Lösen Sie für $n \geq 1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}&y_0 = 0\\&y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n.\\&y_{n+1} = 1\end{aligned}$$

a) Wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1\\
\hline
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1\\
-1 & 0 & 1 & \ldots & n-2 & 1\\
-2 & -1 & 0 & \ldots & n-3 & 1\\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots\\
-(n-1) & -(n-2) & -(n-3) & \ldots & 0 & 1
\end{array}$$

Wenn wir für $k = n, n-1, \ldots, 2$ von der $k$-ten Zeile die $(k-1)$-te Zeile abziehen, erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1\\
\hline
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1\\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0\\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0\\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots\\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1\\
\hline
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0\\
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist folglich

$$\begin{array}{rcl}
x_n & = & t_1\\
x_{n-1} & = & t_2\\
& \vdots & \\
x_3 & = & t_{n-2}\\
x_2 & = & 1 - \sum_{i=1}^{n-2}(n-i)t_i\\
x_1 & = & -1 + \sum_{i=1}^{n-2}(n-i-1)t_i
\end{array}$$

für $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2} \in \mathbb{R}$ beliebig.

b) Wir lösen das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & & \dots & & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Um die Matrix auf Zeilenstufenform zu bringen, führen wir die folgenden $n$ Schritte durch (nur die erste und letzte Zeile bleiben dabei unverändert):

1. Schritt: Wir ziehen die 1. Zeile von der 2. Zeile ab.

2. Schritt: Wir addieren die 2. Zeile der neuen Matrix zum 2-fachen der 3. Zeile.

$k$. Schritt: Wir addieren die $k$-te Zeile der neuen Matrix zum $k$-fachen der $(k+1)$-ten Zeile.

Somit erhalten wir die Matrix

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 2 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 3 & & \dots & & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & 0 & 0 & -(n+1) & n & 0 \\
0 & & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Nach Normieren der Zeilen wird diese zu

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & & \dots & & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \dots & & & 0 & 0 & 1 & -\frac{n}{n+1} & 0 \\
0 & & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$
y_k = \frac{k}{n+1} \qquad \text{für} \qquad k = n+1, n, n-1, \dots, 1, 0.
$$

**4.** *Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen:*

a) Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

b) "Lösen" Sie mit einem gewöhnlichen Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie, dass jedes $\binom{x}{y}$, das zur Lösungsmenge beider Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gehört, auch eine Lösung von **b)** ist und lösen Sie damit **b)**.

a) Offensichtlich lautet die Lösung $x = 0, y = 1$.

b) Mit dem Taschenrechner findet man die Lösung $x = 0, y = 1$ (oder je nach Taschenrechner zumindest eine Lösung mit relativ grossem Fehler). Beim Einsetzen ins Gleichungssystem sieht man jedoch, dass diese falsch ist. Der Rundungsfehler ist zu gross!

c) Falls

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gelten, gilt auch

$$\left[ \begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist $x = 2, y = -2$. Durch Einsetzen sieht man, dass diese auch eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}$$

ist. Folglich ist $x = 2, y = -2$ eine Lösung von **b)**. Da der Rang des LGS in **b)** gleich 2 ist, ist diese Lösung eindeutig.