Lösungen 8

1. Bestimmen Sie das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

√ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

√ (e) Keine der genannten Möglichkeiten.

3. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\surd$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Die Matrix ist nicht invertierbar.

Mit Hilfe der Formel

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

folgt sofort die richtige Antwort.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aus dieser möchten wir die erste Spalte extrahieren. Das heisst, das Produkt von rechts oder links mit einer weiteren Matrix ist die erste Spalte von A. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(a) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, diese Multiplikation ist nicht definiert.

(b) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, dies ergibt eine $3 \times 2-$Matrix, die aus der Matrix A durch ersetzen der zweiten Spalte mit Nullen entsteht.

(c) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, dies ergibt die zweite Zeile von A.

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Falsch, diese Multiplikation ist nicht definiert.

$\surd$ (e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

5. Sei A eine 4×4-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung.

ii) $Ax = b$ hat für jedes b mindestens eine Lösung.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra (5. Auflage), Satz 2.8 und benutze folgende Äquivalenz: (i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung $\Longleftrightarrow$ (iii) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
Denn (i) mit $b = 0$ impliziert (iii) und die Negation von (i) – also ein b mit zwei Lösungen $x_1 \neq x_2$ – führt zu einer nicht-trivialen Lösung $A\underbrace{(x_1 - x_2)}_{=:x\neq 0} = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$ des homogenen Gleichungssystems.

6. Für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $b = (1,2,0)^\top$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ...

√ (a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss sich b als Linearkombination der Spalten ausdrücken lassen. Da die dritte Spalte nur das zweifache der ersten ist, können wir diese ignorieren und versuchen b als Linearkombination der ersten beiden Spalten zu schreiben. Dies ist aber nicht möglich, da die dritte Komponente von b Null ist und daher der erste Spaltenvektor in der Linearkombination nicht vorkommen darf - und somit b also ein Vielfaches der zweiten Spalte sein müsste.
Alternativ kann man den Gauss-Algorithmus verwenden, um das System mit rechter Seite b in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

7. Sei A eine 2×3-Matrix. Dann existiert eine 3×2-Matrix B, welche nicht die Nullmatrix ist, aber trotzdem gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für eine 2×3-Matrix gibt es im Gaussendschema immer mindestens eine Nicht-Pivotspalte. Damit lassen sich nichttriviale Lösungen mit einem freien Parametern für das homogene System finden. Sei also $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ eine solche nichttriviale Lösung und definiere $B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$ ($\neq$ Nullmatrix). Dann ist $AB = \begin{pmatrix} Ax & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ die 2×2-Nullmatrix.

8. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0 \ldots$

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

$\checkmark$ (c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Wir lesen den Rang der Matrix ab, indem wir erkennen, dass die erste und dritte Spalte linear abhängig sind. Somit ist Rang $A = 2$. Da A eine 3×3-Matrix ist, muss das homogene Gleichungssystem Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freien Parameter besitzen. Falls wir den Rang nicht direkt ablesen können, kann man auch den Gauss-Algorithmus anwenden um die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen (siehe Aufgabe 6).

9. Für die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt:

(a) Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.

$\checkmark$ (b) $\operatorname{Rang} B \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

$\checkmark$ (c) Für $a = 0$ ist $\det B = 0$.

Wir bringen die Matrix mit Gauss in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & a^2 - 9 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 1 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Damit lesen wir die richtigen Aussagen anhand der entstehenden Nullzeilen von B ab.

10. Der Rang von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt...

(a) 0.

(b) 1.

√ (c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Der Rang ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten oder Zeilen von A. Die ersten zwei Zeilen von A sind linear unabhängig, die dritte Zeile ergibt sich als Summe der ersten beiden, also ist Rang $A = 2$.

11. Seien A, B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Produkt AB auch symmetrisch.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Im Allgemeinen ist die Aussagen falsch – die Matrizen müssten kommutieren (d.h. $AB = BA$) damit das Produkt wieder symmetrisch ist. Am einfachsten zeigt dies ein Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind beide symmetrisch aber das Produkt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist es nicht.

12. Gegeben sei eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1}. Dann gilt:

√ (a) $A^{-1} = A^T$

Richtig, Orthogonalität ist genau über diese Eigenschaft definiert ($A^T A = I$ ist nur eine andere Form dies niederzuschreiben).

(b) $A^{-1} = 2A$

Dies ist nie möglich für eine orthogonale Matrix.

(c) $A^{-1} = -A$

Für gewisse orthogonale Matrizen kann dies richtig sein, im Allgemeinen ist es jedoch falsch.

(d) Die Inverse existiert nicht.

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

13. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

√ (a) A_1 ist nicht orthogonal.

Richtig, die Spalten sind zwar normiert, aber das Skalarpodukt beider Spalten ist 1 – sie stehen also nicht orthogonal zueinander. Auch ist A_1 noch nicht einmal invertierbar, aber jede orthogonale Matrix ist invertierbar.

(b) A_2 ist nicht orthogonal aber die inverse A_2^{-1} ist es.

Falsch. Es ist zwar richtig, dass A_2 nicht orthogonal ist (die zweite Spalte ist nicht normiert), aber dann ist automatisch auch die Inverse nicht orthogonal. Eine Matrix A ist orthogonal genau dann wenn die Inverse es ist.

14. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A_1 ist orthogonal.

Falsch, die zweite Spalte ist nicht normiert, aber die Spalten stehen orthogonal zueinander.

(b) A_2 ist orthogonal.

Falsch, die Spalten sind nicht orthogonal zueinander (aber sie sind normiert).

$\checkmark$ (c) Keine der genannten Möglichkeiten.

15. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^\top A$ die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$ ist. Dann gilt:

(a) A ist orthogonal und $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Falsch, denn A ist keine quadratische Matrix (insbesondere nicht invertierbar) und somit nicht orthogonal.

$\checkmark$ (b) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Richtig, denn $\|A\,\mathbf{x}\| = \sqrt{(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$.

(c) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Falsch, das gilt nie. Ein Gegenbeispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $A^\top A = \mathbf{I}_2$ und mit $B = A^\top$ ist also BA orthogonal, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal (noch nicht einmal invertierbar). Oder noch einfacher: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann $A^\top A = \mathbf{I}_1$ (die 1×1-Einheitsmatrix welche natürlich orthogonal ist) und mit $B = A^\top$ ist BA orthogonal, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal.

16. Gegeben sei die $n \times n-$Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 1 & & * \\ \vdots & \vdots & & \\ n & 1 & & \end{pmatrix},
$$

wobei nur die ersten beiden Spalten bekannt sind. Angenommen es existiert eine LR-Zerlegung $LR = A$, was können Sie darüber aussagen?

(a) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \cdots & -n \end{pmatrix}^T$.

(b) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & \cdots & -n \end{pmatrix}^T$.

$\surd$ (c) Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A.

Richtig, die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}^T$, da $a_{11} = 1$ gilt.

(d) Man muss die gesamte Matrix A kennen um die erste Spalte von L zu bestimmen.

(e) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.

(f) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.

(g) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.

(h) Man muss die gesamte Matrix A kennen um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.

Der erste Schritt der LR-Zerlegung ist

$$
\begin{array}{c|ccc|}
\cline{2-4}
 & 1 & 1 & \\
2 & 2 & 1 & \\
3 & 3 & 1 & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
n & n & 1 & \\
\cline{2-4}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|ccc|}
\cline{2-4}
 & 1 & 1 & \\
* & 0 & -1 & \\
* & 0 & -2 & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
* & 0 & 1-n & \\
\cline{2-4}
\end{array}
\rightarrow \cdots,
$$

woraus man die erste Spalte von L und $r_{22} = -1$ ablesen kann.