Lösungen 9

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1?$$

(a) Für jedes x.

(b) Für kein x.

√ (c) Für $x = 0$

√ (d) Für $x = 2$.

(e) Für $x = 4$.

Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1.$$

Dies ist für $x_1 = 0$ oder $x_2 = 2$ gleich 1.

2. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0.4 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A, d.h. eine Linksdreiecksmatrix L, eine Rechtsdreiecksmatrix R und eine Permutationsmatrix P, für welche $PA = LR$ gilt.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i,\ i = 1, 2$, mit Hilfe von a) für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Matlab.

d) Lösen Sie die Gleichungssysteme aus b) mit Matlab.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{c} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{array} \begin{array}{|ccc|rrr|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(E)_1} 0 \begin{array}{|ccc|rrr|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 4/5 & 38/5 \\ \hline \end{array}$$

$$\xrightarrow{(E)_2} \begin{array}{|ccc|rrr|} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) i. $L\,c = P\,b_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = 7 \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 = -2 \Rightarrow c_2 = \frac{18}{5} \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

$R\,x = c$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = \frac{18}{5} \Rightarrow x_2 = -5 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii. $L\,c = P\,b_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 4.5 \\ 1.75 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = 3.75 = \frac{15}{4} \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 = 4.5 \Rightarrow c_2 = \frac{15}{2} \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 = 1.75 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 7.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

$R\,x = c$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 7.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{1}{5}x_3 = 0.25 \Rightarrow x_3 = \frac{5}{4} \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = 7.5 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2} \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3.75 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}.$$

c)
```
A=[5 1 2; 2 0.4 1; -4 0 6];
[L,R,P]=lu(A)
```

d)
```
A=[5 1 2; 2 0.4 1; -4 0 6];
b1=[7 3 -2]';
b2=[3.75 1.75 4.5]';
[L,R,P]=lu(A);
c1=L\(P*b1);
x1=R\c1
c2=L\(P*b2);
x2=R\c2
```

3. Berechnen Sie die Determinante von

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und von} \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\det M = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$

Dabei haben wir zuerst die erste und die dritte Zeile vertauscht (daher kommt das negative Vorzeichen) und danach auf die so entstandene Matrix den Gauss-Algorithmus angewandt, was die Determinante unverändert lässt.
$\det N = 0$, da die zweite Zeile die Summe der ersten und der dritten ist.

4. Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/(2\sqrt{2}) & \sqrt{3}/(2\sqrt{2}) & 1/\sqrt{2} \\ -1/(2\sqrt{2}) & \sqrt{3}/(2\sqrt{2}) & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit MATLAB die Determinante von M.

b) Geben Sie allgemein an, welche Werte für die Determinante einer orthogonalen Matrix überhaupt in Frage kommen (Begründung!).

Lösung:

a)
```
M=[sqrt(3)/2 1/2 0;
   -1/(2*sqrt(2)) sqrt(3)/(2*sqrt(2)) 1/sqrt(2);
   -1/(2*sqrt(2)) sqrt(3)/(2*sqrt(2)) -1/sqrt(2)]
det(M)
```

b) Allgemein gilt: M ist orthogonal, falls $M^\top M = I_n$. Aus

$$\det(M^\top M) = \det M^\top \det M = (\det M)^2$$

folgt für M orthogonal:

$$(\det M)^2 = \det(M^\top M) = \det I_n = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1.$$