Lösungen 11

1. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen.

Die Addition auf $\mathbb{R}_+^2$ sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
2. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}$
3. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

$\mathbb{R}_+^2$ ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar gemäss der...

(a) 1. Definition.

Falsch, falls z.B. $\lambda < 0$ ist, ist $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}_+^2$. Und die Vektorraumaxiome fordern, dass die Skalarmultiplikation eine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ nach $\mathbb{R}_+^2$ sein muss.

(b) 2. Definition.

Falsch, z.B. ist das Distributivgesetz $\lambda(x+y) = \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 y_1 \\ e^\lambda x_2 y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 e^\lambda y_1 \\ e^\lambda x_2 e^\lambda y_2 \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y$ für $\lambda \neq 0$ nicht erfüllt. Die Beziehung $1 \cdot x = x$ ist ebenfalls nicht erfüllt, da $1 \cdot x = e \cdot x \neq x$.

√ (c) 3. Definition.

Richtig, es werden alle Vektorraumaxiome erfüllt. Bemerkung: Der Nullvektor dieser Vektorraumstruktur ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das additiv inverse Element "$-x$" ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1/x_1 \\ 1/x_2 \end{pmatrix}$. Dies ist wohldefiniert, da x_1 und x_2 nicht 0 sein können.

2. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* dieser drei Vektoren ist dann definiert als

$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

a) Beweisen Sie, dass $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $|S(a, b, c)|$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.

c) Was sagt das Vorzeichen von $S(a, b, c)$ aus?

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
(a \times b) \cdot c &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \\
&= \det(a, b, c).
\end{aligned}$$

b) Für das Volumen V des Parallelepipeds gilt $V = Gh$, wobei G die Grundfläche und h die Höhe ist. Nach Serie 5, Aufgabe 4 gilt für die Grundfläche mit Seiten a, b die Formel

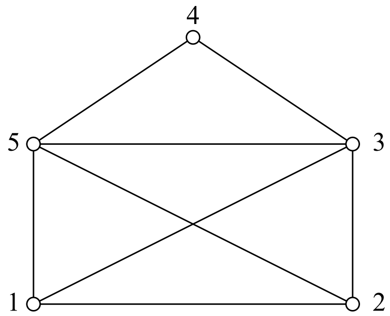
$$G = \|a \times b\|.$$

Für die Höhe gilt $h = \|c\| \cos(\alpha)$, wobei α der Winkel zwischen c und einem Vektor ist, der senkrecht auf a und b steht (also senkrecht zur Ebene, die von den beiden Vektoren a und b aufgespannt wird) und auf derselben Seite der Ebene liegt (dies nur damit h positiv ist). Genau einer der beiden Vekoren $a \times b$ oder $-a \times b$ ist so ein Vektor (unter der Annahme, dass $a \times b \neq 0$; im Fall $a \times b = 0$ ist die Grundfläche, das Volumen und S gleich Null, die Formel also korrekt). Der Winkel zwischen c und $a \times b$ ist entweder α oder $\pi - \alpha$ und es gilt $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$. Daher gilt

$$V = \|a \times b\| \|c\| \cos(\alpha) = \pm(a \times b) \cdot c = |S(a, b, c)|.$$

c) Es gilt $S(a, b, c) > 0$ genau dann, wenn das Tripel (a, b, c) positiv orientiert ist, d.h. genau dann, wenn es die Drei-Finger-Regel (de.wikipedia.org/wiki/Drei-Finger-Regel) erfüllt.

3. Wir interpretieren den Graphen G



aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von $R_0 = 1\,\Omega$ entspricht. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel $R = R_0 \frac{\tau_{15}}{\tau}$, wobei τ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G ist und τ_{15} die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

Hinweis: Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

Lösung: In Serie 10, Aufgabe 4 haben wir berechnet, dass $\tau = 40$ gilt. Ausserdem gilt $\tau_{15} = \tau - \tau'_{15}$, wobei τ'_{15} die Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen G_{15} ist, den man erhält, wenn man die Kante in G zwischen den Knoten 1 und 5 löscht. Für G_{15} hat man

$$\begin{aligned}
L^{G_{15}} &= D^{G_{15}} - A^{G_{15}} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch Berechnen des $(3,3)$-Kofaktors erhalten wir mit dem Kirchhoff-Matrix-Tree-Theorem

$$\tau'_{15} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 30 - 4 - 5 = 21.$$

Folglich gilt

$$R = R_0 \tau_{15}/\tau = R_0(\tau - \tau'_{15})/\tau = (40-21)/40\,\Omega = 19/40\,\Omega.$$

4.

a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für $n = 3$.

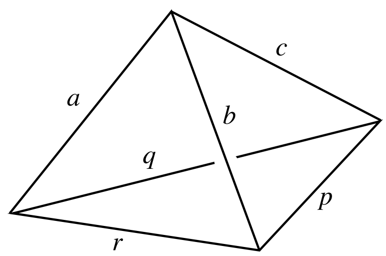
b) Für die Fläche eines ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Man kann zeigen, dass die Formel

$$F^2 = -\frac{1}{16}\det\begin{pmatrix}0 & a^2 & b^2 & 1\\ a^2 & 0 & c^2 & 1\\ b^2 & c^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

denselben Wert für F ergibt. Für das Volumen V eines Tetraeders mit den Kantenlängen a, b, c, p, q, r



gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V^2 = \frac{1}{2^5 3^2}\det\begin{pmatrix}0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1\\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1\\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1\\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt hat das Tetraeder mit den Kantenlängen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$?

Lösung:

a) Man zeigt z.B. mit der Regel von Sarrus (de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_Sarrus)

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{pmatrix} = x_2x_3^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 - x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_3^2x_1.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Ausmultiplizieren von

$$\prod_{1\leq i<j\leq 3}(x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

($(i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$ sind die einzigen Paare, die die drei gegebenen Ungleichungen $1 \leq i < j \leq 3$ erfüllen).

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}
&\overset{Z_1-Z_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{S_1-S_2}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. } S_1}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & -4 & 7 & 0 \\ 9 & 12 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 9 & 12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2(48 + 36 + 63 - 84 + 36 + 36) - (16 + 16) \\
&= 270 - 32 = 238.
\end{aligned}$$

Dann gilt $V = \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \cdot 238} = \frac{1}{12}\sqrt{119}$.