Lösungen Serie 14: Ferienserie

1. Finden Sie ein Erzeugendensystem des Lösungsraums $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des Systems

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}\right. .$$

Wir schreiben das System als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Lösungsraum finden wir mit Gauss-Elimination:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}} \overset{(E)_1}{\longrightarrow} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}}$$

$$\overset{(E)_2}{\longrightarrow} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}} \overset{(E)_3}{\longrightarrow} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}}$$

Wähle $x_5 = \alpha \in \mathbb{R}$. Aus $\frac{6}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0$ folgt $x_4 = \frac{x_5}{3} = \frac{\alpha}{3}$. Weiter folgt:

$$\begin{aligned} & -x_3 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{21}\alpha - \frac{6}{21}\alpha = -\frac{\alpha}{3}, \\ & -7x_2 + 7x_3 - 10x_4 + 8x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{7}(-\frac{7}{3}\alpha - \frac{10}{3}\alpha + \frac{24}{3}\alpha) = \frac{\alpha}{3}, \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{3}\alpha + \frac{3}{3}\alpha = -\alpha \\ & \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \left(-\alpha, \frac{\alpha}{3}, -\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \alpha \right)^\top | \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ein mögliches Erzeugendensystem des Lösungsraums ist also

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sowie nichttriviale Vielfache davon.

2. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}, \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\, x_1 = x_4\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

a) U,

b) V,

c) $U \cap V$.

a) $U = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\right\}$. Man kann also x_1, x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Damit ist $x_2 = 2x_3 - x_4$. Man kann U also schreiben als

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(1)}} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(2)}} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:a^{(3)}}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ sind offensichtlich ein Erzeugendensystem für U.

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\, x_1 = x_4\right\}$. Man kann also x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Aus $x_1 = x_4$ folgt: $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$. Also gilt:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie in **a)** sieht man, dass $b^{(1)}, b^{(2)}$ ein Erzeugendensystem von V bildet mit

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) $U \cap V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_2 - 2x_3 + x_4 = 0}_{(i)}, \underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0}_{(ii)}, \underbrace{x_1 = x_4}_{(iii)} \right\}$.

Es folgt:

$$x_1 = x_4 \Rightarrow x_2 \overset{(ii)}{=} 2x_3 \Rightarrow x_4 \overset{(i)}{=} 2x_3 - x_2 = 2x_3 - 2x_3 = 0 \overset{(iii)}{\Rightarrow} x_1 = 0.$$

x_3 kann als freier Parameter gewählt werden. Damit folgt:

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow c^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Erzeugendensystem von $U \cap V$.

3. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Betrachte die k Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ im Vektorraum V.
$a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + \cdots + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \cdots = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.
Falls jeder Vektor b von V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ **erzeugend**.
In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$ oder 4) und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mit Hilfe vom Gaussverfahren systematisieren:
Schreibe $A = (a^{(1)} \dots a^{(k)})$. A ist eine $n \times k-$Matrix, wobei n die Anzahl Zeilen ist. Mit der Gauss-Schema können wir $r = \operatorname{Rang} A$ finden.

Es gilt: die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = n$.

a)

$$\begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\longrightarrow} \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ also } n = 3,\ k = 2,\ r = 1.$$

Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

b)

$$\begin{array}{|rrr|} \hline 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\longrightarrow} \begin{array}{|rrr|} \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_2}{\longrightarrow} \begin{array}{|rrr|} \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ \hline \end{array} \overset{(E)_3}{\longrightarrow} \begin{array}{|rrr|} \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

also gilt $n = 4$, $k = r = 3$. Da $r = k$ sind die Vektoren linear unabhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

c)

$$\begin{array}{|rrr|} \hline 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\longrightarrow} \begin{array}{|rrr|} \hline 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \overset{(E)_2}{\longrightarrow} \begin{array}{|rrr|} \hline 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \\ \hline \end{array}$$

also $n = k = r = 3$, und damit sind die Vektoren linear unabhängig und erzeugend.

d)

$$\boxed{\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}}$$

also $r = n = 3$, $k = 4$. Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r = n$ sind sie erzeugend.

4. Es seien
$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$
mit $\binom{x}{0} := 1$ die Binomialpolynome.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ im Vektorraum aller Polynome linear unabhängig ist.

b) P_2 bezeiche den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass $P_2 = \operatorname{span}\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$.

c) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ so, dass
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2}$$
gilt, wenn
$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Die Aufgabe c) kann entweder durch direkte Rechung gelöst werden oder mit Hilfe der diskreten Taylor-Formel, welche für ein Polynom p vom Grad n besagt, dass
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k p(0) \binom{x}{k},$$
wobei $\Delta^0 p(x) := p(x)$, $\Delta^1 p(x) := p(x+1) - p(x)$ und $\Delta^k p(x) := \Delta^1(\Delta^{k-1} p(x))$ die diskreten Differenzenoperatoren sind.

a) Seien a_0, a_1, a_2 reelle Zahlen mit
$$\begin{aligned} a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) x + \frac{a_2}{2} x^2 &= 0. \end{aligned}$$
Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ gelten muss, damit die Gleichung stimmt. Folglich sind die $\binom{x}{i}$ linear unabhängig.

b) Sei $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$. Wir suchen reelle Zahlen a_0, a_1, a_2 sodass
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + a_2 \binom{x}{2}$$
gilt. Dies ist (vergleiche mit Teil **a)**) äquivalent zu
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) x + \frac{a_2}{2} x^2.$$
Aus dem Koeffizientenvergleich folgt, dass die Gleichung für
$$a_2 = 2b_2, \quad a_1 = b_1 + b_2, \quad a_0 = b_0$$
erfüllt ist. Dies zeigt, dass $P_2 = \operatorname{span}\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ gilt.

c) Aus Teil **b)** folgt, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Bedingung erfüllt.

5.

a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ (Begründung).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

a) Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten: $r = k = n = 3$.

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}} \overset{(E)_1}{\to} \boxed{\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{array}} \overset{(E)_2}{\to} \boxed{\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \end{array}}$$

Wir können also z.B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir können statt $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ aber auch $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ nehmen, sowie $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt:
Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A ist gleich $r = \operatorname{Rang} A$.
Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim U \leq r$.
Wegen Satz 4.3 i) aus dem Buch wissen wir zudem, dass mehr als d Vektoren

linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim U = \operatorname{Rang} A$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{array}}$$

Fall $a = b = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \\ 1 & 2 & 3-c \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

- Falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

Fall $a = 0, b \neq 0$:

- für $c = 0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \text{ also } d = r = 2,$$

- für $c \neq 0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & b & -c \\ 0 & 0 & -c \end{array}} \text{ also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{array}} \overset{(E)_1}{\to} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \end{array}} \overset{(E)_2}{\to} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+c)b}{2a} \end{array}}$$

- Falls $-\frac{(3a+c)b}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = -3a$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{(3a+c)b}{2a} \neq 0 : d = r = 3$.

6. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$ für $\mathbb{R}^3$, wobei

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Betrachten Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten y_1, y_2, y_3, die x in der Basis $\mathcal{B}$ beschreiben, d.h.

$$x = y_1\, b^{(1)} + y_2\, b^{(2)} + y_3\, b^{(3)}.$$

b) Sei nun der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, beschrieben durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ in der Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$.

a) Wir suchen y_1, y_2, y_3 so, dass $x = y_1\, b^{(1)} + y_2\, b^{(2)} + y_3\, b^{(3)}$, d.h.

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} &= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =: Ty. \end{aligned}$$

Löse $x = Ty$ mit Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \overset{(II)+(I)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \overset{(II)\leftrightarrow(III)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow y_3 = -1,\ y_2 = -2,\ y_1 = 4.$

b) Sei v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ dargestellt. Es folgt:

$$v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A.

b) Ermitteln Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spaltenvektoren in dieser Basis.

Wir wenden den Gauss-Algorithmus auf die Matrix A^T an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \overset{(II)-3(I),\,(III)-(I),\,(IV)+2(I),\,(V)+3(I)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(III)-2(II),\,(IV)-(II),\,(V)+(II)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Folglich gilt $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T) = 2$.

b) Wir können die Pivot-Zeilen von A^T als Basis des betrachteten Vektorraumes wählen, d. h.

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 := (1,1,2,3)^T, b_2 := (3,4,3,8)^T \right\}.$$

Aus den Schritten des Gauss-Verfahrens können wir ablesen, dass in der Basis $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} (1,3,-4,1)^T - b_1 - 2(b_2 - 3b_1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1,3,-4,1)^T = -5b_1 + 2b_2, \\ (-2,-1,-7,-7)^T + 2b_1 - (b_2 - 3b_1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-2,-1,-7,-7)^T = -5b_1 + b_2, \\ (-3,-4,-3,-8)^T + 3b_1 + (b_2 - 3b_1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-3,-4,-3,-8)^T = -b_2 \end{aligned}$$

gilt.

8. Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5 \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V.

Die entsprechende Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt $\dim(V) = \mathrm{rang}(A) = 2$ und eine mögliche Basis ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der reduzierten Matrix entspricht:

$$\mathcal{B} = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^2 + t - 3\}.$$

9.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix eine Inverse?

Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man Gauss-Schritte ausführt. Wir bringen A also in Zeilenstufenform mit dem Gaussverfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 2-6a & -4+5a \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6a & 6+5a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente, also $180 + 30a$. A hat eine Inverse für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, denn eine Matrix ist genau dann invertierbar wenn die Determinante nicht Null ist.

10. Gegeben sei ein Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (2-\alpha)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & -4x_2 & - & (2-\alpha)x_3 & = & -4 \\ & & (3-\alpha)x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

Die Determinante der zum Gleichungssystem gehörenden Matrix ist $(2-\alpha)(2-5\alpha+\alpha^2)$ - man entwickle z.B. nach der ersten Spalte. Das System ist genau dann eindeutig lösbar wenn die Determinante ungleich Null ist, also $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, \frac{1}{2}(5+\sqrt{17}), \frac{1}{2}(5-\sqrt{17})\}$ und die Lösung ist $x_1 = x_2 = -\frac{2+\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}, x_3 = \frac{8-4\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}$. Es bleiben die Fälle in denen die Determinante Null ist, also keine oder unendlich viele Lösungen zu erwarten sind. Setzt man $\alpha = 2$ ein, so sieht man leicht, dass x_1 beliebig sein kann - also unendlich viele Lösungen existieren - und $x_2 = 1, x_3 = 0$ gelten muss. Für die restlichen Werte von α existieren keine Lösungen - die zweite und dritte Gleichung werden unverträglich.

11. Für welche reellen Werte von s und t hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & sy & + & s^2z & = & 1 \\ s^2x & + & y & + & 2tz & = & 1 \\ sx & + & s^2y & + & z & = & t \end{array}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

Die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & 2t \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $1 - 2s^3 + s^6 = (1 - s^3)^2$. Dieses Polynom hat nur $s = 1$ als reelle Nullstelle. Für $s \neq 1$ ist die eindeutige Lösung $z = \frac{t-s}{1-s^3}, y = \frac{1-s^2-s^3+2st+s^4t-2t^2}{(1-s^3)^2}, x = \frac{1-s+s^4-3s^2t+2st^2}{(1-s^3)^2}$. Falls $s = 1$ gilt, so liefern die erste und dritte Gleichung $t = 1$ (für $s = 1$ und $t \neq 1$ existieren also keine Lösungen) und die unendlich vielen Lösungen sind $z = 0, y = 1 - x$, wobei x beliebig ist.

12. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -7x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

Es gibt genau eine Lösung: $x = -\frac{5}{2}, y = \frac{17}{4}, z = \frac{9}{4}$.

13. Welche Beziehungen zwischen $b_1, b_2, \ldots, b_5$ müssen erfüllt sein, damit das folgende System lösbar ist?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & b_5 \end{array}$$

Beispielsweise sind die unteren drei Gleichungen unabhängig, daher bestimmen b_3, b_4, b_5 eindeutig eine Lösung und legen somit auch die Werte für b_1 und b_2 fest. Durch Addition der dritten und vierten Gleichung erhält man $b_1 = b_3 + b_4$ und durch Subtraktion der dritten vom dreifachen der vierten erhält man $b_2 = 3b_4 - b_3$.

14. Auf einem geschlossenen Metalldraht werden an 4 Punkten die Temperaturen x_1, x_2, x_3, x_4 gemessen. Dabei ist die Temperatur in einem der Punkte jeweils gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der beiden benachbarten Punkte.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, x_4 auf.

b) Bestimmen sie die Lösungsmenge davon.

Das Gleichungssystem in Matrixschreibweise lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, die Temperatur ist also konstant.

15. Geben Sie für s und t Bedingungen an, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & sx_2 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & sx_3 & = & t \end{array}$$

a) keine Lösung,

b) genau eine Lösung,

c) unendlich viele Lösungen

besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist $2s - 2$. Also haben wir genau eine Lösung wenn $s \neq 1$ und zwar $x_1 = \frac{st+2s-4}{2s-2}, x_2 = \frac{2-t}{2s-2}, x_3 = -x_2$. Ist nun $s = 1$, so erhält man als Verträglichkeitsbedingung $t = 2$ und in diesem Fall sind die Lösungen $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_2 = 2 - x_1, x_3 = x_1 - 2$. Für $s = 1$ und $t \neq 2$ gibt es keine Lösung.

16. Der sogenannte **Massenausgleich zweiter Ordnung** (Link zu Animationen) einer k-Zylindermaschine liefert für die Impulse (I_1), (I_2) und die Momente (M_1), (M_2) der ersten und zweiten Ordnung folgende Bedingungen:

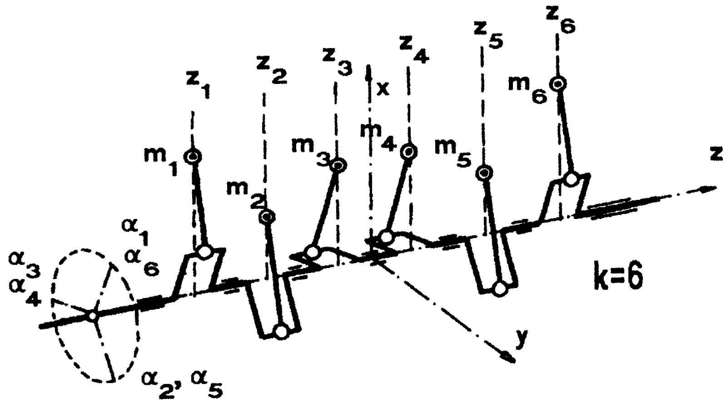
$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sin\alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \cos\alpha_i = 0 \tag{I_1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sin 2\alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \cos 2\alpha_i = 0 \tag{I_2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \sin\alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i z_i \cos\alpha_i = 0 \tag{M_1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \sin 2\alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i z_i \cos 2\alpha_i = 0 \tag{M_2}$$

Dabei bezeichnen α_i die Kurbelwinkel und $m_i > 0$ die Massen. Wir nehmen weiter an, dass der Massenschwerpunkt in $z = 0$ liegt, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und dass $k > 1$.



a) Wie lautet die Matrix A des homogenen linearen Gleichungssystems, das die Vektoren $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)^T$ und $\vec{M} = (z_1 m_1, \ldots, z_k m_k)^T$ erfüllen müssen? Warum ist $\vec{M}$ nie ein Vielfaches von $\vec{m}$? Welchen Rang darf A bei Massenausgleich höchstens haben?

b) Bestimmen Sie A und Rang(A) und lösen Sie $Ax = 0$ für die zwei Fälle:

- 4-Zylinder mit Zündfolge 1-3-4-2, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 180°$.
- 6-Zylinder mit Zündfolge 1-5-3-6-2-4, $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120°$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 240°$.

Ist in beiden Fällen Massenausgleich möglich?

c) Gibt es für den üblichen Aufbau einer 4-Zylindermaschine

$$m_1 = \ldots = m_4 = m, \quad z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$$

Kurbelwinkel α_i, so dass Massenausgleich zweiter Ordnung vorliegt?

a) Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \dots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \dots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix}$$

lauten die Gleichungssysteme $A\vec{m} = 0, A\vec{M} = 0$, wobei hier 0 der Nullvektor in $\mathbb{R}^4$ ist.

Angenommen $\vec{M}$ sei ein Vielfaches von $\vec{m}$, so gilt $\lambda\vec{m} = \begin{pmatrix} \lambda m_1 \\ \lambda m_2 \\ \vdots \\ \lambda m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 m_1 \\ z_2 m_2 \\ \vdots \\ z_k m_k \end{pmatrix} =$ $\vec{M}$ und somit $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = \lambda$ (weil alle $m_i \neq 0$) - ein Widerspruch zur Annahme $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$.

Der Rang der Matrix A darf höchstens gleich $k - 2$ sein (diese Bedingung ist automatisch erfüllt sobald $k \geq 6$, da der Rang höchstens 4 sein kann). Wäre $\mathrm{Rang}(A) = k$, so hätte das Gleichungssystem $A\vec{m} = 0$ nur die Lösung $\vec{m} = 0$, was wegen $m_i > 0$ nicht sein kann. Wäre $\mathrm{Rang}(A) = k - 1$, so gäbe es nur eine linear unabhängige Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$, daher wären $\vec{m}$ und $\vec{M}$ linear abhängig - wir haben oben gezeigt, dass dem nicht so ist.

b) 4-Zylinder: A ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in Zeilenstufenform also z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Lösungen für $A\vec{m} = 0$ sind somit von der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wegen der Bedingung $m_i > 0$ existieren also keine zulässigen Lösungen und somit kein Massenausgleich 2. Ordnung.

6-Zylinder: Die Matrix A und eine mögliche Zeilenstufenform lauten

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen des homogenen Systems sind

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und man erhält einen Massenausgleich z.B. mit $\vec{m} = m\,(1,1,1,1,1,1)^\top, \vec{M} = m\,(z_1, z_2, z_3, -z_3, -z_2, -z_1)^\top$.

c) Die Gleichungen lauten

$$
\begin{aligned}
m\left(\sin(\alpha_1)+\sin(\alpha_2)+\sin(\alpha_3)+\sin(\alpha_4)\right) &= 0 \qquad (1)\\
m\left(\cos(\alpha_1)+\cos(\alpha_2)+\cos(\alpha_3)+\cos(\alpha_4)\right) &= 0 \qquad (2)\\
mz_3\left(-3\sin(\alpha_1)-\sin(\alpha_2)+\sin(\alpha_3)+3\sin(\alpha_4)\right) &= 0 \qquad (3)\\
mz_3\left(-3\cos(\alpha_1)-\cos(\alpha_2)+\cos(\alpha_3)+3\cos(\alpha_4)\right) &= 0. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Wir kürzen die Faktoren vor den Klammern weg und setzen $\alpha_1 = 0$. (1)+(3) und (2)+(4) ergeben dann $\sin(\alpha_3) = -2\sin(\alpha_4)$ (5) und $\cos(\alpha_3) = 1 - 2\cos(\alpha_4)$ (6). Quadrieren und addieren von (5) und (6) ergibt

$$1 = (-2\sin(\alpha_4))^2 + (1-2\cos(\alpha_4))^2 = 5-4\cos(\alpha_4) \Rightarrow \cos(\alpha_4) = 1 \Rightarrow \alpha_4 = 0.$$

Setzt man dies in (6) ein erhält man $\alpha_3 = \pi = 180°$ und mit (2) schliesslich $\alpha_2 = \pi = 180°$. Somit gibt es keinen Massenausgleich 2. Ordnung (siehe b)).