I.

(a) Wir berechnen die allgemeine homogene Lösung und dazu die Nullstellen von

$$X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$$

also existiert $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$y(x) = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-x}.$$

(b) Da $X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1) = (X+1)(X-1)(X+i)(X-i)$ gilt folglich

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + \lambda_3 \cos(x) + \lambda_4 \sin(x), \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

(c) Die Substitution $x = e^t$ und $h(t) = y(e^t)$ liefert

$$h(t) = y(e^t) = y(x), \qquad h'(x) = y'(e^t)e^t = xy'(x)$$
$$h''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x).$$

Wir erhalten damit die Beziehungen

$$x^2y''(x) = h''(t) - h'(t), \qquad xy'(x) = h'(t), \qquad y(x) = h(t).$$

Die Gleichung ist äquivalent zu

$$h''(t) - 4h(t) + 5h(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ hat die Nullstellen $2 \pm i$ und somit lautet die allgemeine Lösung

$$h(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t)$$

sowie

$$y(x) = h(\log(x)) = x^2 \left(c_1 \cos(\log(x)) + c_2 \sin(\log(x))\right).$$

II.

(a) Wir berechnen die allgemeine homogene Lösung und dazu die Nullstellen von

$$z^2 + 4 = (z+2i)(z-2i).$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist

$$y(x) = \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)$$

mit unbestimmten Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Seien λ_1, λ_2 zwei Funktionen und

$$y_0(x) = \lambda_1(x) \cos(2x) + \lambda_2(x) \sin(2x)$$

so dass

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\cos(2x) + \lambda_2'(x)\sin(2x) = 0, \\ -2\lambda_1'(x)\sin(2x) + 2\lambda_2'(x)\cos(2x) = \dfrac{1}{\sin(2x)} \end{cases} \tag{1}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$, die Matrix

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar (da $\det R(x) = 2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) = 2 \neq 0$) und

$$R(x)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & -\frac{1}{2}\sin(2x) \\ \sin(2x) & \frac{1}{2}\cos(2x) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dann gilt wegen (1) und (2)

$$\begin{cases} \lambda_1'(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2'(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sin(2x)}. \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = -\dfrac{x}{2}, \\ \lambda_2(x) = \dfrac{1}{4}\log|\sin(2x)|. \end{cases}$$

Folglich gilt

$$y(x) = \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\log|\sin(2x)|\sin(2x), \ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Es gilt $y(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}(2t-3) + \frac{2}{3}e^t$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Es gilt $y(t) = \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) + \cos(t)\log\left|\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

III.

(a) Die Lösung der homogene Gleichung ist $y(x) = \lambda\, e^{-x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) also suchen wir eine Lösung y_0 der Differentialgleichung (a) so dass $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$. Dann gilt

$$y_0'(x) = (\lambda'(x) - \lambda(x))e^{-x},$$

und $y_0' - y_0 = 2\sin(x)$ ist äquivalent zu

$$\lambda'(x)e^{-x} = 2\sin(x) \tag{3}$$

oder $\lambda'(x) = 2\sin(x)e^x$. Wir suchen eine Lösung λ der Gleichung (3) so dass $\lambda(x) = (a\cos(x) + b\sin(x))e^x$. Dann gilt

$$\lambda'(x) = ((a+b)\cos(x) + (-a+b)\sin(x))e^x$$

und $-a = b = 1$. Folglich gilt

$$y_0(x) = \frac{3}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)e^{-x}$$

und

$$y(x) = \left(\lambda + \sin(x) - \cos(x)\right)e^{-x}.$$

Da $y(0) = \lambda - 1 = 0$ ist die Lösung

$$y(x) = \left(1 + \sin(x) - \cos(x)\right).$$

(b) Es existiert $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$y(x) = \left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}} + x + 1 - e^x - \sin(x).$$

Wenn $x = 0$ gilt

$$1 = y(0) = \lambda_1$$

also $\lambda_1 = 1$, und

$$y'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + 1 - e^x - \cos(x).$$

Dann gilt

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 - 1$$

oder

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Folglich gilt

$$y(x) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}} + x + 1 - e^x - \sin(x).$$

(c) Es gilt $y(x) = \cos(\omega x) + \dfrac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2}$.

(d) Die Substitution $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ liefert

$$y(x) = xv(x), \qquad y'(x) = v(x) + xv'(x)$$

und die DGL ist äquivalent zu

$$x(v(x) + xv'(x)) = xv(x) + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad v'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(x) = x + c$$

Es folgt

$$y(x) = x(x + c)$$

und aus der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ folgt $c = 1$, oder $y(x) = x(x + 1)$.

(b) Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \sin(x)\,dx + C \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-y} = -\cos(x) + C$$

und umformen liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\log(\cos(x) - C).$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ folgt $C = 1 - e$ und somit erhalten wir als Lösung für das AWP

$$y(x) = -\log(\cos(x) + e - 1).$$

(f) Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 - x^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C$$

und somit

$$y(x) = \pm e^C \cdot \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ aus der Aufgabenstellung können wir nicht erfüllen, da die rechte Seite für $x = 1$ nicht definiert ist. Bereits die DGL ist an der Stelle $x = 1$ nicht wohl-definiert. Alternativ bestimmen wir die Lösung für das AWP $y(0) = 1$, und erhalten in diesem Fall $C = 0$.