I. Grenzwerte in mehreren Variablen

1. Sei f die Funktion, die durch $f(x,y) = \frac{y}{x-1}$ auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

   Lösung: Wir sehen, dass f auf der Linie $\{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 1\}$ verschwindet. Hätte also f einen Grenzwert für $(x,y) \to (1,0)$, wäre dieser gleich 0. Aber, die Linie $y = x-1$ geht durch $(1,0)$ und auf dieser Linie ist f gleich 1. Also existiert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ nicht.

2. Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

   Lösung: Wir behaupten dass der Grenzwert nicht existiert. Noch ein Mal sehen wir, dass f auf der Linie $\{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ verschwindet. Also hätten wir noch ein Mal $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ wenn er existieren würde. Aber für $y = x^2$ sehen wir dass

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

   Da die Parabel $\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ durch $(0,0)$ geht, folgt unsere Behauptung.

   Bemerken Sie bitte das Folgende in diesem Beispiel: Eine Linie durch den Punkt $(0,0)$ die ungleich $\{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ ist, ist durch eine Gleichung der Form $x = ay$, für $a \in \mathbb{R}$ definiert. Auf so einer Linie haben wir

$$f(x,y) = f(ay,y) = \frac{a^2y^3}{a^4y^4+y^2} = \frac{a^2y}{a^4y^2+1} \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

   Somit sehen wir, dass wenn wir den Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nur geraden Linien entlang berechnet hätten, dann wäre unsere Schlussfolgerung, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert hätte! Also sehen wir, dass Grenzwerte in $\mathbb{R}^n$ zu berechnen, im allgemeinen viel komplizierter ist als auf $\mathbb{R}$!

3. Sei f die Funktion, die auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } (x,y) \neq (1,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x-1)^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

   Lösung: Wir sehen, dass für (x,y) mit $x > 0$ und $(x,y) \neq (1,0)$ gilt:

$$|f(x,y)| = \frac{|(x-1)^2|}{|(x-1)^2+y^2|}|\ln(x)| \leq |\ln(x)|.$$

   Wegen $\lim_{x\to1}\ln(x) = 0$ sehen wir, dass $0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{x\to1}|\ln(x)| = 0$ und damit auch $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0$.

4. Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er?

   Lösung: Wir wissen, dass die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sin(t)$ stetig differenzierbar ist. Wir wissen auch, dass

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\sin(t) = \cos(0) = 1.$$

   Von der Definition einer Ableitung folgt jetzt

$$\sin(s) = \sin(s) - \sin(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sin(t)\cdot s + o(s) = s + o(s), \tag{1}$$

   wobei $s \mapsto o(s)$ eine Funktion ist, die

$$\frac{o(s)}{s} \xrightarrow{s\to0} 0 \tag{2}$$

   erfüllt. In Polarkoordinaten können wir $(x,y) \neq (0,0)$ als $x = r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$ schreiben. Da $x^2+y^2 = r^2$ sehen wir, dass $f(x,y) = f(r) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$ unabhängig von θ ist. Somit haben wir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to0} f(r)$ (wenn dieser existiert). Wegen (1) haben wir

$$f(r) = \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \frac{r^2+o(r^2)}{r^2} = 1 + \frac{o(r^2)}{r^2},$$

und (2) gibt nun

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0}\left(1 + \frac{o(r^2)}{r^2}\right) = 1,$$

was unsere Aufgabe löst.

II. Stetigkeit in mehreren Variablen Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f stetig?

Lösung: Wir behaupten, dass f nicht stetig ist. Es reicht, wenn wir zeigen, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert. Wir sehen dass f auf der Menge $\{(x,y) \mid y = 0,\ x \neq 0\}$ verschwindet. Hätte also f ein Grenzwert für $(x,y) \to (0,0)$ müsste dieser gleich 0 sein. Anderseits sehen wir für $x = y$, dass

$$f(x,x) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Da die Linie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ durch $(0,0)$ geht folgt unsere Behauptung.

III. Stetigkeit in n Variablen.

1. Sei $0 < p < \infty$ und $f_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Function

$$f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

Lösung: Die Funktion $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto |x|^p = \exp(p \log|x|)$ stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$, und wenn $x \to 0$, gilt $\log|x| \to -\infty$ und

$$e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

also

$$\lim_{x\to 0} \exp(p\log|x|) = 0$$

und f_0 ist stetig auf $\mathbb{R}^2$. Da $1/p > 0$, wegen Übung IV. und wegen die Stetigkeit der Komposition ist die Funktion

$$f(x,y) = (f_0(x,y) + f_0(y,x))^{\frac{1}{p}}$$

stetig.

2. Sei $0 < p < \infty$, sei $n \geq 1$, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

Lösung: Die Beweis ist ähnlich mit der Funktionen $f_i(x_1, \cdots, x_n) = |x_i|^p$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \max\{x,y\}.$$

Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

Lösung: Sei $\left\{x_k = (x_k^1, x_k^2)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ so dass $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ und sei $\varepsilon > 0$.

Falls: $\max\left\{x^1, x^2\right\} = x^1$.

Dann existiert $\delta > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ so dass für alles $k \geq N$ gilt es $|x_k^1 - x^1| < \varepsilon$ und $|x_k^2 - x_k^2| < \varepsilon$. Folglich gilt für alles $k \geq N$

$$x_k^2 < x_2 + \varepsilon \leq x^1 + \varepsilon \leq x_k^1 + 2\varepsilon.$$

Folglich gilt für alle $k \geq N$ die Ungleichung $f(x_k^1, x_k^2) = \max\left\{x_k^1, x_k^2\right\} \leq x_k^1 + 2\varepsilon$ und

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq x^1 + 2\varepsilon.$$

Da $f(x_k) \geq x_k^1$ und $f(x_k) \geq x_k^2$ für alles $k \in \mathbb{N}$ gilt folglich

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq \max\left\{\lim_{k\to\infty} x_1^k, \lim_{k\to\infty} x_2^k\right\} = \max\left\{x^1, x^2\right\} = f(x).$$

Deshalb haben wir für alles $\varepsilon > 0$

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leq \limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(x) + 2\varepsilon$$

also

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = \limsup_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$$

und f ist stetig. Falls $\max\left\{x^1, x^2\right\} = x^2$ ist die Beweis identisch.

4. Sei $n \geq 1$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$$

Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

Lösung: Die Beweis ist ähnlich.