I. Partielle Ableitungen

Seien $n \geq 2$ und $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die stetige partielle Ableitungen haben. Nehmen Sie an, dass $\partial_{x_1} f(x) = \partial_{x_1} g(x)$ an jeder Stelle $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f - g$ nicht von x_1 abhängig ist.

Lösung: Dass $f-g$ von y unabhängig ist heisst, dass für jedes $x' = (x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Funktion $t \mapsto (f-g)(t, x')$ konstant ist. Da $t \mapsto (f-g)(t, x_2, \cdots, x_n)$ differenzierbar ist, ist sie konstant genau dann wenn ihre Ableitung verschwindet. Ihre Ableitung ist durch

$$\frac{\partial}{\partial t}(f-g)(t, x') = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x') - \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, x') = 0$$

gegeben. Somit haben wir gezeigt, dass $f - g$ von x_1 unabhängig ist.

II. Partielle Ableitungen und der Gradient.

Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die stetige partielle Ableitungen hat, ist das Vektorfeld $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, das durch für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

definiert ist. Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die stetige partielle Ableitungen haben und nehmen Sie an, dass $\nabla(f-g) = 0$. Zeigen Sie, dass $f - g$ eine konstante Funktion ist.

Lösung: $\nabla(f-g)(x) = 0$ heisst, dass

$$\partial_{x_i} f(x) - \partial_{x_i} g(x) = 0, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

Somit zeigt Übung **I.**, dass $(f - g)$ unabhängig von $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ ist. Also ist $(f - g)$ konstant.

III. Eulerscher Satz. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$ wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$

$$f(tx) = t^\lambda f(x)$$

gilt. Zeigen Sie dass eine *differenzierbare* Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot \nabla f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \, \partial_{x_i} f(x) = \lambda f(x). \tag{1}$$

Lösung: Wenn f λ-homogen ist gilt es für alle $t > 0$ und $1 \leq i \leq n$ wegen die Kettenregel

$$\partial_t f(tx) = \sum_{i=1}^n x_i \, \partial_{x_i} f(tx) = \partial_t \left(t^\lambda f(x) \right) = \lambda \, t^{\lambda - 1} f(tx)$$

dann (1) gilt mit $t = 1$. Wechselseitig wenn (1) definiere $g : \mathbb{R}^n \times (0, \infty), (x,t) \mapsto t^{-\lambda} f(tx)$. Dann ist g differenzierbare (durch den Satz der Komposition von differenzierbaren Funktionen.) und gilt für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_t g(x,t) = -\lambda t^{-(\lambda+1)} f(tx) + t^{-\lambda} \sum_{i=1}^n x_i \, \partial_{x_i} f(tx) = t^{-(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^n t x_i \partial_{x_i} f(tx) - \lambda f(tx) \right) = 0$$

also g nur von t abhängig ist. Dann gilt für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(tx) = t^\lambda g(x,t) = t^\lambda g(x,1) = t^\lambda f(x).$$

IV. Lineare partielle Differentialgleichungen.

Der Laplace-Operator Δ über $\mathbb{R}^n$ ist der Differentialoperator, der durch für alle zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt es

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 f \qquad \text{mit} \quad \partial_{x_i}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Falls U ist eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbaren so dass

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 f = 0$$

dann wird f als harmonisch (auf U) bezeichnet.

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt es $f(x) = \log |x|$. Zeigen Sie dass f harmonisch ist.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt es $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$. Für welchen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_α harmonisch?

Der Wärmeleitungsgleichung Operator über $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ist der Differentialoperator so dass für alle zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt es

$$(\partial_t - \Delta_x) f = \partial_t f - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 f, \quad (x,t) = ((x_1, \cdots, x_n), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

3. Zeigen Sie dass die Funktion $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ gilt es

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Lösung.

1. Es gilt für alle $1 \le i \le 2$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (f ist C^∞ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$)

$$\partial_{x_i}^2 \log |x| = \frac{1}{2} \partial_{x_i}^2 \log |x|^2 = \partial_{x_i} \left(\frac{x_i}{|x|^2} \right) = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}$$

also

$$\Delta \log |x| = \frac{2}{|x|^2} - 2 \sum_{i=1}^{2} \frac{x_i^2}{|x|^4} = \frac{2}{|x|^2} - \frac{2}{|x|^2} = 0.$$

2. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_α glatte und

$$\partial_{x_i} f_\alpha(x) = \partial_{x_i} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\alpha}{2} \cdot 2x_i \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} = \alpha x_i |x|^{\alpha-2}$$

$$\partial_{x_i}^2 f_\alpha(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-2) x_i^2 |x|^{\alpha-4}$$

$$\Delta f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha |x|^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-2) x_i^2 |x|^{\alpha-4} = n\alpha |x|^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-2} = \alpha(\alpha-n+2)|x|^{\alpha-4}.$$

Dann ist die Funktion f_α harmonisch ist wenn dann, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2-n$ (für $n = 2$ gibt es ohne eine Lösung).

3. Es gilt für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

$$\partial_t u = -\frac{n}{2} t^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{|x|^2}{4t^2} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) u$$

$$\partial_{x_i} u = -\frac{2x_i}{4t} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{x_i}{2t} u$$

$$\partial_{x_i}^2 u = -\frac{1}{2t} u + \frac{x_i^2}{4t^2} u = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2} \right) u$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2} \right) u = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) u = \partial_t u.$$

V. Eine explizite Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

Sei $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und betrachten Sie das folgende System ($v \in \mathbb{R}^n$ ist eine Konstante, und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die unbekannte)

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla f = 0 \\ \qquad\quad f_{|t=0} = f_0 \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so dass für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gilt es $f(x, t) = f_0(x - tv)$ eine Lösung der partielle Differentialgleichung (2) ist.

Lösung. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x, 0) = f_0(x - 0 \cdot v) = f_0(x)$ dann $f_{|t=0} = f_0$. Da f_0 differenzierbare ist und $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto x - tv$ auch trivial differenzierbare ist auch $f = f_0 \circ \varphi$ differenzierbare und gilt wegen die Kettenregel $\nabla f(x, t) = \nabla f_0(x - tv)$ und

$$\partial_t f = \partial_t f(x - tv) = \sum_{j=1}^{n} -v_i \partial_{x_i} f_0(x - tv) = -v \cdot \nabla f_0(x - tv) = -v \cdot \nabla f.$$

Bermerkung. Das System ist eine Konvektions-Diffusions-Gleichung.