I. Richtungsableitungen Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_u f(a)$ im Punkt a in Richtung u der folgenden Funktionen.

1. $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$, $a = (0,2)$, $u = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}, 1)$.
   Lösung: Von der Definition wissen wir, dass
   $$D_u f(a) = \frac{d}{dt}\left(f(a+tu)\right)_{|t=0} \tag{1}$$
   ist. Wenn wir einsetzen finden wir, dass
   $$f(a+tu) = \sin\left(\frac{t^2}{5}\right)\cos\left((2+\frac{2t}{\sqrt{5}})^2\right)$$
   ist. Wegen der Produktregel haben wir somit
   $$D_u f(a) = \left[\cos\left(\frac{t^2}{5}\right)\frac{2t}{5}\cos\left(\left(2+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2\right) - \frac{4}{\sqrt{5}}\left(2+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)\sin\left(\frac{t^2}{5}\right)\sin\left(\left(2+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2\right)\right]_{t=0} = 0$$

2. $f(x,y) = e^{-x}\log(y)$, $a = (0,1)$, $u = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4)$.
   Lösung: Wir haben
   $$f(a+tu) = e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}\log\left(1+\frac{4t}{\sqrt{17}}\right).$$
   Wenden wir (1) an, haben wir somit
   $$D_u f(a) = \left[\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}}{\sqrt{17}}\log\left(1+\frac{4t}{\sqrt{17}}\right) + \frac{4e^{\frac{t}{\sqrt{17}}}}{\sqrt{17}(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\right]_{t=0} = \frac{\log(1)+4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

3. $f(x,y) = e^y\tan(x) + 4yx^3$, $a = (0,1)$, $u = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4)$.
   Lösung: Wir haben
   $$f(a+tu) = e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\tan\left(\frac{-t}{\sqrt{17}}\right)+4\left(1+\frac{4t}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{-t}{\sqrt{17}}\right)^3 = e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\tan\left(\frac{-t}{\sqrt{17}}\right)-4\left(1+\frac{4t}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{t}{\sqrt{17}}\right)^3$$
   und die Produktregel zusammen mit (1) gibt nun
   $$\begin{aligned} D_u f(a) = \Bigg[&\frac{4}{\sqrt{17}}e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\tan\left(\frac{-t}{\sqrt{17}}\right) + e^{(1+\frac{4t}{\sqrt{17}})}\frac{-1}{\cos^2(\frac{-t}{\sqrt{17}})\sqrt{17}} \\ &-\frac{16}{\sqrt{17}}\frac{t^3}{\sqrt{17}^3} - 4\left(1+\frac{4t}{\sqrt{17}}\right)\frac{3t^2}{\sqrt{17}^3}\Bigg]_{t=0} = \frac{-e}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

4. $f(x,y) = x^5 y + \sin(\frac{x^2}{y})$, $a = (4,2)$, $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$.
   Lösung: Wir haben
   $$f(a+tu) = 2\left(4-\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^5\left(1-\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + \sin\left(\frac{(4-\frac{t}{\sqrt{5}})^2}{2(1-\frac{t}{\sqrt{5}})}\right),$$
   und somit
   $$\begin{aligned} D_u f(a) =&\Bigg[-\frac{10}{\sqrt{5}}\left(4-\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^4\left(1-\frac{t}{\sqrt{5}}\right) - 2\left(4-\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^5\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &+\cos\left(\frac{(4-\frac{t}{\sqrt{5}})^2}{2(1-\frac{t}{\sqrt{5}})}\right)\left(-\frac{4-\frac{t}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-t} + \frac{2(4-\frac{t}{\sqrt{5}})^2}{\sqrt{5}(2-\frac{2t}{\sqrt{5}})^2}\right)\Bigg]_{t=0} \\ =&-\frac{10}{\sqrt{5}}256 - 2\cdot 4^5\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos(8)\left(-\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2\cdot 16}{4\sqrt{5}}\right) \\ =&-\frac{2560}{\sqrt{5}} - \frac{2048}{\sqrt{5}} + \cos(8)\frac{4}{\sqrt{5}} \\ =&\frac{512}{\sqrt{5}} + \cos(8)\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

II. Partielle Ableitungen vs. differenzierbarkeit Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Zeigen Sie dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ und in jeder Richtung $u \in \mathbb{R}^2$ eine Richtungsableitung $D_u f(a)$ besitzt.

   Tipp: Um zu beweisen dass $D_u f(a)$ existiert, muss man zeigen dass $t \mapsto f(a + tu)$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a \neq (0,0)$ reicht es deswegen $(a + tu)$ in f einzusetzen und danach zu bemerken, dass diese Funktion differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a = (0,0)$ muss man die Definition anwenden.

2. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ *nicht* differenzierbar ist.

   Tipp: Wiederholen Sie, dass wenn f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, dann ist sie auch an der Stelle a stetig...

Lösung:

1. Sei $a = (x_0, y_0) \neq (0,0)$ und $u = (u_1, u_2) \neq (0,0)$. Dann haben wir

   $$f(a + tu) = \frac{(x_0 + tu_1)^2 (y_0 + tu_2)}{(x_0 + tu_1)^4 + (y_0 + tu_2)^2}.$$

   Da der Nenner $\neq 0$ ist für $t = 0$ gibt die Quotientenregel, dass $t \mapsto f(a+tu)$ differenzierbar ist an der Stelle $t = 0$. Somit haben wir gezeigt dass alle Richtungsableitungen an der Stelle a existieren. Jetzt zeigen wir, dass alle Richtungsableitungen an der Stelle $a = (0,0)$ existieren. Zunächst bemerken wir, dass f auf der Linie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ verschwindet. Somit folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Für einen Vektor $u = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ mit $\sin(\theta) \neq 0$ haben wir

   $$f((0,0) + tu) = f(tu) = \frac{t^3 r^3 \cos^2(\theta)\sin(\theta)}{t^4 r^4 \cos^4(\theta) + t^2 r^2 \sin^2(\theta)} = \frac{tr\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{t^2 r^2 \cos^4(\theta) + \sin^2(\theta)}.$$

   Da $\sin^2(\theta) \neq 0$ gibt die Quotientenregel nochmal, dass $D_u f(0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(tu) = \frac{r\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{r\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$ ist. Somit haben wir gezeigt, dass alle Richtungsableitungen an allen Stellen existieren, und damit ist die Übung gelöst.

2. Wir wissen schon von Serie 1, Übung 2b, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist. Somit kann f nicht an $(0,0)$ differenzierbar sein.

III. Partielle Ableitungen Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 x + y, \quad f(0,0) = 1 \tag{2}$$

erfüllt? Gibt es mehrere?

Lösung: Nehmen wir an, dass es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt die, die Bedingungen erfült. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(x, y_0) - f(x,0) &= \int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy = \int_0^{y_0} yx^2 + x + 2y \, dy \\ &= \left[\frac{x^2 y^2}{2} + xy + y^2 \right]_{y=0}^{y_0} = \frac{x^2 y_0^2}{2} + xy_0 + y_0^2. \end{aligned}$$

Somit erfüllt f

$$f(x,y) = f(x,0) + \frac{x^2 y^2}{2} + xy + y^2. \tag{3}$$

Wegen der zweiten Bedingung haben wir auch

$$y^2 x + y = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,0) + \frac{x^2 y^2}{2} + xy + y^2 \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) + xy^2 + y.$$

Wenn wir die zwei Seiten vergleichen, sehen wir, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist also $c := f(x,0)$ eine Konstante und (3) können wir jetzt als

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + c$$

schreiben. Um c zu bestimmen benutzen wir nun die dritte Bedingung:

$$1 = f(0,0) = c.$$

Somit haben wir bewiesen, dass $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + 1$ sein muss. Jetzt kontrolliert man sofort, dass diese f die Bedingungen (2) erfüllt. Also gibt es mindestens eine Funktion die unsere Bedingungen erfüllt.

Wir behaupten, dass $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + 1$ die einzige Funktion ist, die (2) erfüllt. Oben haben wir ja genau bewiesen, dass eine Funktion die (2) erfüllt muss gleich $\dfrac{x^2y^2}{2} + xy + y^2 + 1$ sein. Sonst kann man durch Übung 5 argumentieren: Wenn $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen sind, die beide (2) erfüllen, dann ist $\nabla(f-g)(a) = 0$ an allen Stellen $a \in \mathbb{R}^2$. Also, ist $f - g$ konstant. Deswegen folgt aus der dritten Bedingung in (2), dass $f = g$, was auch die Eindeutigkeit zeigt.

IV. Wellengleichung.

Sei $c > 0$ und $\Box$ die Differentialoperator (der d'Alembert-Operator) über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ so dass

$$\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta_x = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2.$$

Wenn $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare ist und $\Box f = 0$ wird f eine Lösung der Wellengleichung bezeichnet.

Im Folgenden wird angenommen, dass $n = 1$.

1. Sei $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$. Zeigen Sie, dass wir in den neuen Koordinaten (ξ, η) die folgende Identität haben für alle zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Box f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = -4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f(\xi, \eta).$$

2. Zeigen Sie, dass jede C^2 Lösung der Wellengleichung $\Box f = 0$ als

$$f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

für einige Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

3. Finden Sie die Lösung das folgende System

$$\begin{cases} \Box u = 0 \\ u_{|t=0} = f \\ \partial_t u_{|t=0} = g \end{cases}$$

bei den die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Lösung.

1. Mit $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$ gilt es

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi + \eta}{2} \\ t &= \frac{1}{c}\frac{-\xi + \eta}{2} \end{aligned}.$$

Dann gilt (wegen die Kettenregel) für alle C^2 Funktion f die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) f$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = c\left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) f$$

also

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) = -4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

2. Folglich $\Box f = 0$ (für eine C^2 Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) gilt genau dann, wenn

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} f\right) = 0$$

also die Funktion $\partial_\eta f$ von ξ unabhängig ist. Dann existiert $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \eta) = g(\xi)$$

aber diese Gleichung impliziert dank des Fundamentalsatz der Analysis, dass es existiert eine Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $f_1' = g$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f(\xi, \eta) - f_1(\xi)\right) = 0$$

und existiert $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

$$f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Da $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$ gilt es $f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Sei $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) = -cf_1'(x) + cf_2'(x) = g(x). \end{cases} \tag{4}$$

Da $-cf_1' + cf_2' = (-cf_1 + cf_2)'$ existiert $a \in \mathbb{R}$ so dass

$$-cf_1(x) + cf_2(x) = \int_0^x g(y)dy + a. \tag{5}$$

Dank der Gleichungen (4) und (5) erhalten wir das lineare System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ \int_0^x g(y)dy + a \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$f_1(x) = \frac{1}{2c}\left(cf(x) - \left(\int_0^x g(y)dy + a\right)\right)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2c}\left(cf(x) + \int_0^x g(y)dy + a\right)$$

und folglich gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x - ct) + f(x + ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)fy.$$