I. Taylorpolynome Berechnen Sie des Taylorpolynomes der folgenden Funktionen.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)e^{-y}$, an der Stelle $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$, bis zur zweiten Ordnung.
2. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = 1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/(1-xy)$, an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$, bis zur n Ordnung $n \geq 1$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \arctan(x^2y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = 0$, bis zur zweiten Ordnung.
4. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \log(|z|^2 + 1)$, an der Stelle $z = 0$, bis zur n Ordnung $n \geq 1$.
5. Sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ an der Stelle $x_0 = (2, \cdots, 2)$ bis zur zweiten Ordnung.

Lösung:

1. Es gilt $f(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, und

$$\begin{aligned}
&\partial_x f(x,y) = -\sin(x)e^{-y}, \quad \partial^2_{x,y} f(x,y) = \sin(x)e^{-y} \quad \partial^2_x f(x,y) = -\cos(x)e^{-y} \\
&\partial_y f(x,y) = -\cos(x)e^{-y}, \quad \partial^2_y f(x,y) = \cos(x)e^{-y}.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\partial_x f(x_0,y_0) = -1, \quad \partial^2_{x,y} f(x_0,y_0) = 1, \quad f(x_0,y_0) = \partial^2_x f(x_0,y_0) = \partial_y f(x_0,y_0) = \partial^2_y f(x_0,y_0) = 0$$

und

$$T_2 f((x,y),(x_0,y_0)) = -x + xy.$$

2. Es gilt

$$f(x,y) = \frac{1}{1-xy} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (xy)^n.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$T_n f((x,y),(0,0)) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (xy)^k.$$

3. Es gilt $\arctan(t) = t + O(t^3)$ also

$$\arctan(x^2y) = x^2y + O(x^6y^3).$$

Folglich gilt $T_2 f((x,y),(0,0)) = 0$.

4. Es gilt für alle $|t| < 1$

$$\log(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k.$$

Folglich gilt für alle $|z| < 1$

$$\log(1+|z|^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} |z|^{2k}$$

und gilt für alle $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$$T_n f(0,w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} |w|^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (w_1^2 + w_2^2)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} w_1^{2j} w_2^{2(k-j)}.$$

5. Es gilt für alle $i \neq j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\partial_{x_i} f(x) = \prod_{k \neq i} x_k, \quad \partial^2_{x_i} f(x) = 0, \quad \partial^2_{x_i, x_j} f(x) = \prod_{k \neq i,j} x_k.$$

Dann gilt für alle $1 \leq i \neq j \leq n$

$$f(2) = 2^n, \quad \partial_{x_i} f(2) = 2^{n-1}, \quad \partial^2_{x_i, x_j} f(2) = 2^{n-2},$$

und

$$T_2 f(y, x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot y + \frac{1}{2} y^t \mathrm{Hess} f(x_0) y = 2^n + 2^{n-1} \sum_{i=1}^n y_i + 2^{n-2} \sum_{1 \leq i < y \leq n} y_i y_j.$$

II. Extremalewerte (1)**.**

Bestimmen Sie die Lokale Maxima und Minima der folgenden Funktionen (benutzen Sie die Korollar 3.8.7 aus den Skripten der Vorlesung).

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$.
3. $f : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y(x - 1)e^{-(x^2+y^2)}$.

Lösung:

1. Da $f(x, 0) = x^3 \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ hat f keine globale Extrema. Es gilt

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y, 3y^2 + 3x) = 0$$

gilt genau dann, wenn $x^2 = -y$ und $y^2 = -x$. Dann gilt $x^4 = y^2 = -x$, also $x(x^3 + 1) = 0$ und $y(y^3 + 1) = 0$. Die *reelle* Lösungen der Gleichung $X(X^3 + 1)$ sind $X = 0, -1$. Folglich sind die Lösungen der System $x^2 = -y$, $y^2 = -x$

$$(0, 0), \quad \text{und} \quad (x, y) = (-1, -1).$$

Wir haben

$$\mathrm{Hess}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

also

$$\mathrm{Hess}\, f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Hess}\, f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Dann ist $(0, 0)$ kein Lokale Maximum oder Minimum, da $f(x, 0) = x^3 > f(0, 0) = 0$ für alle $x > 0$ und $f(x, 0) = x^3 < f(0, 0) = 0$ für alle $x < 0$. Dann gilt (da $2xy \leq x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(x-1, y-1) &= (x-1)^3 + (y-1)^3 + 3(x-1)(y-1) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + 3(xy - x - y + 1) \\ &= 1 + x^3 - 3x^2 + y^3 - 3y^2 + 3xy \\ &\leq 1 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + y^3 - \frac{3}{2}y^3 \\ &= 1 - \frac{3}{2}x^2 \left(1 - \frac{2x}{3}\right) - \frac{3}{2}y^2 \left(1 - \frac{2y}{3}\right) < 1 \quad \text{für alle} \quad 0 \leq |x|, |y| < \frac{3}{2} \text{ mit } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Folglich ist $(-1, -1)$ eine starke Lokale Maximum.

2. Es gilt $f(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$, also $f(x, 0) = x^2 \underset{x \to +\pm\infty}{\longrightarrow} \infty$ und f hat kein globales Maximum. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x, x) = 0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$ also (x, x) ist eine globale Minimum für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Es gilt

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\left(y^2+(x-1)^2\right)e^{-(x^2+y^2)} \underset{|(x,y)|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und $f(x,0)=f(1,y)=0$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ also f hat globales Extrema. Es gilt

$$\nabla f(x,y)=\left(y\,(1-2x(x-1))\,e^{-(x^2+y^2)},(x-1)\left(1-2y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}\right).$$

Dann sind die Kritischer Punkt von f die Punkt $x_0=(1,0)$ und

$$x_1=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad x_2=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad x_3=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),x_4=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Wir haben

$$\partial_x^2 f(x,y)=y\,(2(1-2x)-2x(1-2x(x-1)))\,e^{-(x^2+y^2)},\quad \partial_{xy}^2 f(x,y)=(1-2y^2)(1-2x(x-1))e^{-(x^2+y^2)}$$
$$\partial_y^2 f(x,y)=(x-1)\left(-4y-2y(1-2y^2)\right)e^{-(x^2+y^2)}=-2y(x-1)(3-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

und

$$\operatorname{Hess} f(1,0)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}e^{-1},$$

und $(1,0)$ kein lokales Extrema ist (da $f(1,0)=0$, aber $f(1+\varepsilon,\varepsilon)=\varepsilon^2e^{-(1+\varepsilon)^2-\varepsilon^2}>0$ und $f(1+\varepsilon,-\varepsilon)=-\varepsilon^2e^{-(1+\varepsilon)^2-\varepsilon^2}<0$ für alle $\varepsilon>0$). Wenn $2x^2-2x-1=0$ und $1-2y^2=0$ gilt

$$\partial_x^2 f(x,y)=2y(1-2x)e^{-(x^2+y^2)}\neq 0,\quad \partial_{xy}^2 f(x,y)=0$$
$$\partial_y^2 f(x,y)=-4y(x-1)e^{-(x^2+y^2)}\neq 0.$$

Dann x_i (für $1\leq i\leq 4$) ein lokales Maximum gilt genau dann, wenn $\partial_x^2 f(x_i),\partial_y^2 f(x_i)<0$, x_i ein lokales Minimum gilt genau dann, wenn $\partial_x^2 f(x_i)>0$, $\partial_y^2 f(x)>0$ und x_i kein lokales Extremum gilt genau dann, wenn $\partial_x^2 f(x_i)\partial_y^2 f(x_i)<0$. Dann $x_i=(x,y)$ ein globales Minimum gilt genau dann, wenn

$$2y(1-2x)>0 \text{ and } -4y(x-1)>0 \iff \min\{y(1-2x),y(1-x)>0\}.$$

Dann sind x_2,x_3 Lokale Minima und x_1,x_4 sind Lokale Maxima. Da

$$f(x_1)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}}=0,02\cdots$$
$$f(x_4)=\frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{3-\sqrt{3}}{2}}=0,51\cdots$$
$$f(x_2)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{3-\sqrt{3}}{2}}=-0,51\cdots$$
$$f(x_3)=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}}=-0.02\cdots$$

ist x_4 die globale Maximum und x_2 die globale Minimum.

III. Extremalwerte (2)**.** Wir betrachten das Dreieck

$$\Delta := \{(x,y)\in[0,9]^2 \mid y\leq 9-x\}.$$

Sei $f:\Delta\to\mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von f. **Lösung:** Wir müssen Punkte auf dem Rand $\partial\Delta$ kontrollieren und Punkte die im Inneren $\Delta\backslash\partial\Delta$ von Δ liegen.

$\underline{\Delta \backslash \partial\Delta}$: Ein Punkt $(x_0, y_0) \in \Delta\backslash\partial\Delta$ kann nur ein Maximum/Minimum sein, wenn

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x \\ 2 - 2y \end{pmatrix}$$

und somit ist der einzige kritische Punkt $(1, 1) \in \Delta\backslash\partial\Delta$. Wir haben $f(1, 1) = 4$.

$\underline{\partial\Delta}$: Der Rand von Δ besteht aus drei Teilen

$$L_1 := \Delta \cap \{y = 0\}, \quad L_2 := \Delta \cap \{x = 0\}, \quad L_3 := \Delta \cap \{y = 9 - x\}.$$

Wir müssen alle drei Teile untersuchen. Eine Parametrisierung von L_1 ist durch $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 9]$ gegeben. Nun haben wir

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_1(t) &= 2 + 2t - t^2 \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t) &= 2 - 2t. \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt dieser Funktion auf dem Interval $(0, 9)$ ist damit $t = 1$, und wir haben $f(1, 0) = f(\gamma_1(1)) = 3$.

Eine Parametrisierung von L_2 ist durch $\gamma_2(t) = (0, t)$, $t \in [0, 9]$ gegeben. Wir haben

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_2(t) &= 2 + 2t - t^2 \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t) &= 2 - 2t. \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt dieser Funktion auf dem Interval $(0, 9)$ ist somit noch einmal $t = 1$ und wir haben $f(0, 1) = f(\gamma_2(1)) = 3$.

Eine Parametrisierung von L_3 ist durch $\gamma_3(t) = (t, 9 - t)$, $t \in [0, 9]$ gegeben. Wir haben

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_3(t) &= 2 + 2t + 2(9 - t) - t^2 - (9 - t)^2 \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t) &= 2 - 2 - 2t + 2(9 - t) = -4t + 18 \end{aligned}$$

Der einzige kritische Punkt dieser Funktion auf dem Interval $(0, 9)$ ist $t = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ und wir haben

$$f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = f\left(\gamma_3\left(\frac{9}{2}\right)\right) = 2 + 9 + 9 - 2\left(\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{41}{2}.$$

Nun fehlen noch die drei Ecken von Δ. An diesen Stellen haben wir

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(9, 0) = -61.$$

Wir haben nun alle potentiellen Maxima- und Minimastellen gefunden und wir sehen, dass f sein Maximum $\max_\Delta f = 4$ nur an der Stelle $(1, 1)$ annimmt. Wir sehen auch, dass sie ihr Minimum $\min_\Delta f = -61$ genau an den Stellen $(0, 9)$ und $(9, 0)$ annimmt.

IV . Extremalwerte (3)**.** Zeigen dass das Infimum der Integrale

$$F(y) = \int_0^1 (y'(t)^2 - 1)^2 dt$$

unter der C^1 Funktionen $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y(1) = 0$ ist 0; aber durch keine dieser Funktionen wird das Infimum angenommen.

Lösung: Für alle $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ gilt $F(y) \geq 0$, und für alle $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, sei $f_\varepsilon \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ die stetig Funktion (dank der Verklebungslemma)

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon} & \text{für alle } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & \text{für alle } \varepsilon \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon}(-2t+1) & \text{für alle } \frac{1-\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \\ -1 & \text{für alle } \frac{1+\varepsilon}{2} \leq t \leq 1-\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}(t-1) & \text{für alle } 1-\varepsilon \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_0^1 f_\varepsilon(t)dt = 0$$

also die Funktion $y_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$y(x) = \int_0^x f_\varepsilon(t)dt$$

eine C^1 Funktion ist und $y(0) = y(1) = 0$. Dann gilt

$$\int_0^1 (y_\varepsilon'(t)^2 - 1)^2 dt = \int_0^\varepsilon (f_\varepsilon^2(t) - 1)^2 dt + \int_{\frac{1-\varepsilon}{2}}^{\frac{1+\varepsilon}{2}} (f_\varepsilon^2(t) - 1)^2 dt + \int_{1-\varepsilon}^1 (f_\varepsilon^2(t) - 1)^2 dt.$$

Wir haben

$$\int_0^\varepsilon (f_\varepsilon^2(t) - 1)^2 dt = \int_0^\varepsilon \left(\frac{t^2}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 dt \leq \int_0^\varepsilon dt = \varepsilon$$

da $\left|\frac{t^2}{\varepsilon^2} - 1\right| = 1 - \frac{t^2}{\varepsilon^2} \leq 1$ für alle $0 \leq t \leq \varepsilon$. Ebenso, wie $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$ gilt $|f_\varepsilon^2 - 1| = 1 - f_\varepsilon^2 \leq 1$ und

$$\int_{\frac{1-\varepsilon}{2}}^{\frac{1+\varepsilon}{2}} (f_\varepsilon^2(t) - 1)^2 dt + \int_{1-\varepsilon}^1 \left(f_\varepsilon^2(t) - 1\right)^2 dt \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2}\right) + (1 - (1-\varepsilon)) = 2\varepsilon$$

und

$$0 \leq \int_0^1 \left(y_\varepsilon'(t)^2 - 1\right)^2 dt \leq 3\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Folglich ist das Infimum (unter der C^1 Funktionen $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y(1) = 0$) der Funktion F die reelle Zahl 0.

Wenn $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ so dass $y(0) = y(1) = 0$ und $F(y) = 0$ eine Funktion ist, gilt $y'(t)^2 = 1$ für alle $t \in [0,1]$. Die Funktion y' ist stetig, also $y' = 1$ auf $[0,1]$ oder $y' = -1$ auf $[0,1]$, und

$$\int_0^1 y'(t)dt = \pm 1.$$

Aber gilt auch

$$\int_0^1 y'(t)dt = y(1) - y(0) = 0,$$

was ein Widerspruch ist.