I. Satz von der impliziten Funktion.

1. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die glatt Funtion so, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$F(x, y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1.$$
Zeigen Sie dass existiert eine offene Intervalle $U, V \subset \mathbb{R}$ so dass $-1 \in U$, $1 \in V$ und eine C^1 Abbildung $f : U \to V$ mit $f(-1) = 1$ so, dass für alle $(x, y) \in U \times V$ gilt:
$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$
Berechnen Sie $f'(-1)$ (differenzieren Sie die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$).

2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die glatt Funtion so, dass für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$F(x, y, z) = x + y + z + \sin(xyz).$$
Zeigen Sie dass existiert eine offene Disk $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine offene Intervall $V \subset \mathbb{R}$ so dass $(0, 0) \in U$, $0 \in V$ und eine C^1 Abbildung $f : U \to V$ mit $f(0, 0) = 0$ so, dass für alle $(x, y, z) \in U \times V$ gilt:
$$F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y).$$
Berechnen Sie $\nabla f(0, 0)$ (differenzieren die Gleichung $F(x, y, f(x, y)) = 0$).

Lösung:

1. Es gilt
$$\partial_y F(x, y) = 2x^3y - 1 + 2y + 3y^2$$
dann $\partial_y F(-1, 1) = 2 \neq 0$. Dann existiert dank des Satz von der impliziten Funktion eine Funktion $f : U \to V$ mit den vorherigen Eigenschaften, und gilt
$$f'(1) = -\frac{\partial_x f(-1, 1)}{\partial_y f(-1, 1)} = \frac{1}{2}.$$
Gilt für alle $x \in U$
$$x^4 + x^3f(x)^2 - f(x) + f(x)^2 + f(x)^3 = 1.$$
Dann gilt für alle $x \in U$
$$4x^3 + 3x^2f(x)^2 + 2x^3f'(x)f(x) - f'(x) + 2f'(x)f(x) + 3f'(x)f(x)^2 = 0.$$
Da $f(-1) = 1$ gilt folglich
$$0 = -4 + 3 - 2f'(-1) - f'(-1) + 2f'(-1) + 3f'(-1) = -1 + 2f'(-1)$$
also $f'(-1) = \dfrac{1}{2}$.

2. Es gilt
$$\partial_z F(x, y, z) = 1 + xy\cos(xyz),$$
dann gilt $\partial_x F(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, und existiert dank des Satz von der impliziten Funktion eine Funktion $f : U \to V$ mit den vorherigen Eigenschaften. Dann gilt
$$\nabla f(0, 0) = \left(-\frac{\partial_x F(0, 0, 0)}{\partial_z F(0, 0, 0)}, -\frac{\partial_y F(0, 0, 0)}{\partial_z F(0, 0, 0)}\right) = (-1, -1).$$

II. Extrema mit Lagrange-Multiplikator (1) : Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

Zeigen Sie dass für alle $n \geq 1$ und $x_1, \cdots, x_n \geq 0$ gilt

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1}$$

Lösung: Sei $K = \mathbb{R}_+^n \cap \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Dann ist K Kompakt und existiert ein globales Maximum der Funktion

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$$

auf K. Sei $a \in K$ ein globales Maximum. Sei $g(x) = x_1 + \cdots x_n$. Dann gilt $\nabla g(y) = \mathrm{Id}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, und existiert durch Lagranges Satz $\lambda \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\frac{f(a)}{na_i} = \partial_{x_i} f(a) = \lambda \partial_{x_i} g(a) = \lambda.$$

Dann gilt $a_i = \frac{n\lambda}{f(a)}$ für alle $1 \leq i \leq n$, und $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Folglich gilt $a_i = \dfrac{1}{n}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und

$$\max_K f = f(a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}.$$

Für alle $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, falls $x_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ ist die Ungleichung (1) erfüllt, und falls $x \neq 0$ gilt

$$(y_1, \cdots, y_n) = \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i}, \cdots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i} \right) \in K,$$

also

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = f(x_1, \cdots, x_n) = f(y_1, \cdots, y_n) \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

III. Extrema mit Lagrange-Multiplikator (2) : Entropie. Seien $n \geq 2$ und

$$\Delta = [0,1]^n \cap \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n), \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Berechnen Sie die Maxima der folgende Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}_+$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i).$$

Lösung: Sei $x \in \Delta$ ein lokales Maximum, und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$. Dann gilt $\nabla g(y) = \mathrm{Id}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, und existiert durch Lagranges Satz $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$$

Folglich gilt für alle $i = 1, \cdots, n$

$$\partial_{x_i} f(x) = -\log(x_i) - 1 = \lambda$$

Dann gilt für alle $i = 1, \cdots, n$

$$x_i = e^{-(1+\lambda)},$$

aber $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, also $x_i = \dfrac{1}{n}$ für alle $i = 1, \cdots, n$, und für alle $x \in \Delta$ gilt

$$f(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log(x_i) \leq -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log\left(\frac{1}{n}\right) = \log(n). \tag{2}$$

Bemerkung: Da $0 \leq x_i \leq 1$ für alle $x = (x_1, \cdots, x_n)$ gilt folglich für alle $x \in \Delta$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log\left(\frac{1}{x_i}\right) \geq 0$$

und $f(e_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ (mit $(e_1, \cdots, e_n)$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$). Dann ist x in (2) die globales Maximum.

IV. Extrema mit Lagrange-Multiplikator (3). Sei $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ die Determinante. Zeigen Sie dass für alle $(v_1, \cdots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$,

$$|\det(v_1, \cdots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^n |v_i|. \tag{3}$$

Tipp: Suchen sie die Extrema der Funktion det auf $S = \mathbb{R}^{n^2} \cap \{v = (v_1, \cdots, v_n), |v_i|^2 = 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$.

Lösung: Sei $(v_1, \cdots, v_n)$ ein Extremum (der Funktion $\det : S \to \mathbb{R}$). Dann ist $(v_1, \cdots, v_n)$ Lineare Unabhängigkeit (falls $(e_1, \cdots, e_n)$ ist eine Orthonormalbasis gilt $\det(e_1, \cdots, e_n) = 1$ ünd $\det(-e_1, e_2 \cdots, e_n) = -1$, dann ist die Extremum nicht null). Dann existiert $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$\sum_{i=1}^n \det(v_1, \cdots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \cdots, v_n) = \sum_{i=1}^n 2\lambda_i \langle v_i, h_i \rangle \quad \text{für alle } h = (h_1, \cdots, h_n) \in (\mathbb{R}^n)^n.$$

Sei $h_{i,j} = (0, \cdots, 0, v_j, 0 \cdots, 0) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, mit v_j an Position i. Dann gilt mit $h = h_{i,i}$

$$\sum_{i=1}^n \det(v_1, \cdots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \cdots, v_n) = \det(v) = 2\lambda_i |v_i|^2 = 2\lambda_i.$$

Dann gilt $\lambda_i = \dfrac{\det(v)}{2}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt mit $h = h_{i,j}$

$$0 = 2\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle.$$

Folglich ist $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Orthonormalbasis also $\det(v) = \pm 1$. Dann gilt für alle $(v_1, \cdots, v_n) \in S$

$$|\det(v_1, \cdots, v_n)| \leq 1.$$

Sei $(v_1, \cdots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$. Falls $v_i = 0$ ist die Ungleichung (3) erfüllt. Falls $v_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$ gilt

$$(u_1, \cdots, u_n) = \left(\frac{v_1}{|v_1|}, \cdots, \frac{v_n}{|v_n|}\right) \in S$$

also

$$|\det(v_1, \cdots, v_n)| = |\det(u_1, \cdots, u_n)| \prod_{i=1}^n |v_i| \leq \prod_{i=1}^n |v_i|.$$