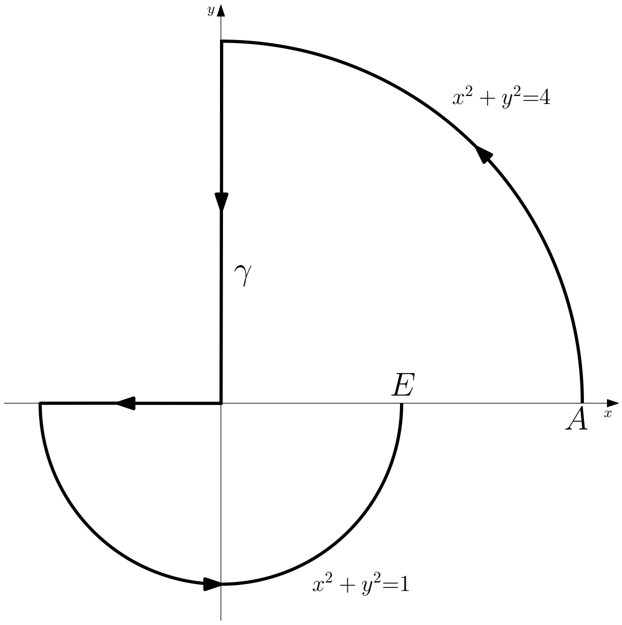
I. Wegintegral Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v(s)\ d\vec{s}$$

entlang dem eingezeichneten Weg γ (vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E) für das Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



Lösung: Wir haben folgende Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t)), & t &\in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
\gamma_2(t) &= (0, -t), & t &\in [-2, 0],\\
\gamma_3(t) &= (-t, 0), & t &\in [0, 1],\\
\gamma_4(t) &= (\cos(t), \sin(t)), & t &\in [\pi, 2\pi].
\end{aligned}$$

- Integral über γ_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} v\ d\gamma_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(\gamma_1(t))\dot{\gamma_1}(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 8\cos^3(t) - 4\cos(t)\sin(t) \\ -8\sin^3(t) + 4\cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -16\cos^3(t)\sin(t) + 8\cos(t)\sin^2(t) - 16\cos(t)\sin^3(t) + 8\cos^3(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -16\underbrace{\cos(t)\sin(t)}_{=\frac{\sin(2t)}{2}}\underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1} + 8\cos(t)\underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1}\,\mathrm{d}t\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(2t) + \cos(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 8\left(\frac{\cos(2t)}{2} + \sin(t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 8\cdot(-1+1) = 0
\end{aligned}$$

- Integral über γ_2:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} v\ d\gamma_2 &= \int_0^2 v(\gamma_2(t))\dot{\gamma_2}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-2}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ -(-t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t\\ &= -\int_{-2}^0 t^3\,\mathrm{d}t = -\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-2}^0\\ &= 4\ .\end{aligned}$$

- Integral über γ_3:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} v\ d\gamma_3 &= \int_0^1 v(\gamma_3(t))\dot{\gamma_3}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

- Integral über γ_4:

$$\begin{aligned}I_4 &= \int_{\gamma_4} v\ d\gamma_4 = \int_\pi^{2\pi} v(\gamma_1(t))\dot{\gamma_1}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_\pi^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3(t)-\cos(t)\sin(t) \\ -\sin^3(t)+\cos^3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t\\ &= \int_\pi^{2\pi} -\cos^3(t)\sin(t)+\cos(t)\sin^2(t)-\cos(t)\sin^3(t)+\cos^3(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\pi^{2\pi} -\underbrace{\cos(t)\sin(t)}_{=\frac{\sin(2t)}{2}}\underbrace{(\cos^2(t)+\sin^2(t))}_{=1}+\cos(t)\underbrace{(\sin^2(t)+\cos^2(t))}_{=1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\pi^{2\pi} -\frac{\sin(2t)}{2}+\cos(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left.\left(\frac{\cos(2t)}{4}+\sin(t)\right)\right|_\pi^{2\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\int_\gamma v\ d\gamma = I_1+I_2+I_3+I_4 = 0+4+\frac{1}{4}+0 = \frac{17}{4}\ .$$

II. Wegintegral (2) Berechnen Sie die Wegintegral

$$\int_\gamma v(s)\ d\vec{s}$$

entlang dem eingezeichneten Weg γ.

1. $v(x,y) = (-y,x)$, $\gamma(t) = (a\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0,\pi]$.
2. $v(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$.

Lösung :

1. Es gilt

$$\int_\gamma v d\gamma = \int_0^\pi (a\cos^2(t)+a\sin^2(t))dt = \pi a.$$

2. Es gilt mit $\gamma(t) = (R\cos(t), \sin(t))$ die Identitäten für alle $t \in [0, 2\pi]$

$$V(\gamma(t)) = \frac{1}{R}(-\sin(t), \cos(t))$$
$$\gamma'(t) = R(-\sin(t), \cos(t)).$$

Dann gilt

$$\int_\gamma v d\gamma = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) dt = 2\pi.$$

III. Potenzial I Nehmen Sie an, dass das stetige Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Potential $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat (also $v = \nabla f$).

1. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Differetialgleichung

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \quad \forall\ t \in [a, b]$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $f(\gamma(b)) \geq f(\gamma(a))$ ist und zeigen Sie, dass genau dann $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ gilt, wenn γ eine konstante Kurve ist.

Lösung: Wir wenden die Kettenregel an:

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\ dt = \int_a^b df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \nabla f(\gamma(t))\ dt = \int_a^b |\nabla f(\gamma(t))|^2\ dt \geq 0. \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Aussage. Weiter folgt daraus, dass $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ genau dann, wenn $0 = \nabla f(\gamma(t)) = v(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Also, genau dann, wenn γ konstant ist.

2. Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, so dass $w(z) \perp v(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = w(\gamma(t)) \quad \forall\ t \in [a, b]$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $[a, b] \ni t \mapsto f(\gamma(t))$ konstant ist.

Lösung: Die Kettenregel gibt

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = v(\gamma(t)) \cdot w(\gamma(t)) = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.