I. Grenzwerte in mehreren Variablen

1. Sei f die Funktion, die durch $f(x,y) = \frac{y}{x-1}$ auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

2. Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ durch $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

3. Sei f die Funktion, die auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ durch $f(x,y) = \frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x-1)^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

4. Sei f die Funktion, die auf der Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ durch $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ definiert ist. Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Und wenn er existiert, was ist er gleich?

II. Stetigkeit in mehreren Variablen Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f stetig?

III. Stetigkeit in n Variablen.

1. Sei $0 < p < \infty$ und $f_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Function

$$f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

   Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

2. Sei $0 < p < \infty$, sei $n \geq 1$, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = \max\{x,y\} .$$

   Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.

4. Sei $n \geq 1$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$$

   Zeigen Sie dass die Funktion f stetig ist.