I. Partielle Ableitungen

Seien $n \geq 2$ und $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die stetige partielle Ableitungen haben. Nehmen Sie an, dass $\partial_{x_1} f(x) = \partial_{x_1} g(x)$ an jeder Stelle $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f - g$ nicht von x_1 abhängig ist.

II. Partielle Ableitungen und der Gradient.

Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die stetige partielle Ableitungen hat, ist das Vektorfeld $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, das durch für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

definiert ist. Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die stetige partielle Ableitungen haben und nehmen Sie an, dass $\nabla(f - g) = 0$. Zeigen Sie, dass $f - g$ eine konstante Funktion ist.

III. Eulerscher Satz. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$ wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$

$$f(tx) = t^\lambda f(x)$$

gilt. Zeigen Sie dass eine *differenzierbare* Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \partial_{x_i} f(x) = \lambda f(x). \tag{1}$$

IV. Lineare partielle Differentialgleichungen.

Der Laplace-Operator Δ über $\mathbb{R}^n$ ist der Differentialoperator, der durch für alle zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt es

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 f \qquad \text{mit} \quad \partial_{x_i}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Falls U ist eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbaren so dass

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 f = 0$$

dann wird f als harmonisch (auf U) bezeichnet.

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt es $f(x) = \log |x|$. Zeigen Sie dass f harmonisch ist.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt es $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$. Für welchen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_α harmonisch?

Der Wärmeleitungsgleichung Operator über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist der Differentialoperator so dass für alle zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt es

$$(\partial_t - \Delta_x) f = \partial_t f - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 f, \quad (x, t) = ((x_1, \cdots, x_n), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

3. Zeigen Sie dass die Funktion $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ gilt es

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

V. Eine explizite Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

Sei $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und betrachten Sie das folgende System ($v \in \mathbb{R}^n$ ist eine Konstante, und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die unbekannte)

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla f = 0 \\ \qquad\quad f_{|t=0} = f_0 \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gilt es $f(x,t) = f_0(x - tv)$ eine Lösung der partielle Differentialgleichung (2) ist.