I. Richtungsableitungen Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_u f(a)$ im Punkt a in Richtung u der folgenden Funktionen.

1. $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$, $a = (0,2)$, $u = (\frac{1}{2}, 1)$.
2. $f(x,y) = e^{-x}\log(y)$, $a = (0,1)$, $u = (-1,4)$.
3. $f(x,y) = e^y \tan(x) + 4yx^3$, $a = (0,1)$, $u = (-1,4)$.
4. $f(x,y) = x^5 y + \sin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, $a = (4,2)$, $u = (-1,-2)$.

II. Partielle Ableitungen vs. differenzierbarkeit Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die folgende Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Zeigen Sie dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ und in jeder Richtung $u \in \mathbb{R}^2$ eine Richtungsableitung $D_u f(a)$ besitzt.

   Tipp: Um zu beweisen dass $D_u f(a)$ existiert, muss man zeigen dass $t \mapsto f(a + tu)$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a \neq (0,0)$ reicht es deswegen $(a + tu)$ in f einzusetzen und danach zu bemerken, dass diese Funktion differenzierbar an der Stelle $t = 0$ ist. Für $a = (0,0)$ muss man die Definition anwenden.

2. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ *nicht* differenzierbar ist.

   Tipp: Wiederholen Sie, dass wenn f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, dann ist sie auch an der Stelle a stetig...

III. Eine partielle Differentialgleichung.

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 x + y, \quad f(0,0) = 1 \tag{1}$$

erfüllt? Gibt es mehrere?

IV. Wellengleichung.

Sei $c > 0$ und $\Box$ die Differentialoperator (der d'Alembert-Operator) über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ so dass

$$\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta_x = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2.$$

Wenn $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare ist und $\Box f = 0$ wird f eine Lösung der Wellengleichung bezeichnet.

Im Folgenden wird angenommen, dass $n = 1$.

1. Sei $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$. Zeigen Sie, dass wir in den neuen Koordinaten (ξ, η) die folgende Identität haben

$$\Box f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = -4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f(\xi, \eta).$$

2. Zeigen Sie, dass jede C^2 Lösung der Wellengleichung $\Box f = 0$ als

$$f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

   für einige Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

3. Finden Sie die Lösung das folgende System

$$\begin{cases} \Box u = 0 \\ u_{|t=0} = f \\ \partial_t u_{|t=0} = g \end{cases}$$

   bei den die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.