I. Substitution

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ die offene Menge

$$U = \mathbb{R}^2 \cap \left\{ (x,y),\ \ y > 1, x > \max\left\{ y, \frac{y}{y-1} \right\} \right\}.$$

1. Bezeichnen Sie der Laplace-Operator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ über U in die neuen Koordinaten

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases}$$

2. Sei $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{xy} \log(xy - x - y)$. Zeigen sie dass f zweimal differenzierbare ist und bestimmen Sie Δf in U.

II. Die Geometrie des Gradientes Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nichtkonstant und differenzierbar. Nehmen Sie an, dass die Gleichung $f(x,y) = c$ eine Kurve C in der Ebene $\mathbb{R}^2$ definiert. Das heisst, es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$\gamma(I) = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\} \tag{1}$$

und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. ∇f steht senkrecht zu C. Dass heisst, für jede $t \in I$ ist $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.
2. Die Richtungsableitung von f in Richtung C verschwindet. Dass heisst, $D_{\gamma'(t)} f(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in I$.
3. Die Richtungsableitung von f ist am grössten in einer Richtung senkrecht zu C.

III. Tangentialebenen Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \sin(x) - y^3 + y^2$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von der Fläche

$$\mathcal{G}(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

im Punkt $(0, 3, f(0,3)) = (0, 3, -18)$.

2. Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Fläche $\mathcal{G}(f)$ am Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0, 0) \in \mathcal{G}(f)$ steht.