I. Satz von der impliziten Funktion.

1. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die glatt Funtion so, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$F(x, y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1.$$
Zeigen Sie dass existiert eine offene Intervalle $U, V \subset \mathbb{R}$ so dass $-1 \in U$, $1 \in V$ und eine C^1 Abbildung $f : U \to V$ mit $f(-1) = 1$ so, dass für alle $(x, y) \in U \times V$ gilt:
$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$
Berechnen Sie $f'(-1)$ (differenzieren Sie die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$).

2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die glatt Funtion so, dass für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$F(x, y, z) = x + y + z + \sin(xyz).$$
Zeigen Sie dass existiert eine offene Disk $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine offene Intervall $V \subset \mathbb{R}$ so dass $(0, 0) \in U$, $0 \in V$ und eine C^1 Abbildung $f : U \to V$ mit $f(0, 0) = 0$ so, dass für alle $(x, y, z) \in U \times V$ gilt:
$$F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y).$$
Berechnen Sie $\nabla f(0, 0)$ (differenzieren die Gleichung $F(x, y, f(x, y)) = 0$).

II. Extrema mit Lagrange-Multiplikator (1) : Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

Zeigen Sie dass für alle $n \geq 1$ und $x_1, \cdots, x_n \geq 0$ gilt
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Tipp: Berechnen Sie das Maximum auf
$$\Delta = [0, 1]^n \cap \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$
und benutzen Sie der Homogenität der Ungleichung.

III. Extrema mit Lagrange-Multiplikator (2) : Entropie.

Seien $n \geq 2$ und
$$\Delta = [0, 1]^n \cap \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$
Berechnen Sie die Maxima der folgende Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}_+$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i).$$

IV. Extrema mit Lagrange-Multiplikator (3).

Sei $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ die Determinante. Zeigen Sie dass für alle $(v_1, \cdots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$,
$$|\det(v_1, \cdots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} |v_i|.$$
Tipp: Suchen sie die Maximum der Funktion det auf $S = \mathbb{R}^{n^2} \cap \big\{ v = (v_1, \cdots, v_n), |v_i|^2 = 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \big\}$.