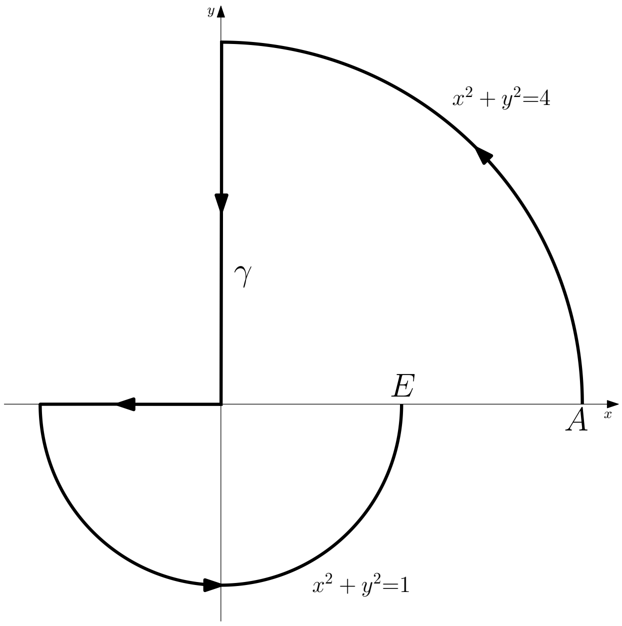
I. Wegintegral (1) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v(s) \cdot d\vec{s}$$

entlang dem eingezeichneten Weg γ (vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E) für das Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



II. Wegintegral (2) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v(s) \cdot d\vec{s}$$

entlang dem eingezeichneten Weg γ.

1. $v(x,y) = (-y, x)$, $\gamma(t) = (a\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$.
2. $v(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$.

III. Potential Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Klasse C^1 und $v = \nabla f$.

1. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, sodass
$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in [a,b].$$
Zeigen Sie, dass $f(\gamma(b)) \geq f(\gamma(a))$ ist und zeigen Sie, dass genau dann $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ gilt, wenn γ eine konstante Kurve ist.
2. Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, so dass $w(z) \perp v(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve, sodass
$$\gamma'(t) = w(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in [a,b].$$
Zeigen Sie, dass $[a,b] \ni t \mapsto f(\gamma(t))$ konstant ist.