Musterlösung 11

1. Für die Diffgleichung $y'' + y' = 0$ ist das charakteristische Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen gibt die Bedingung

$$y(1) = c_1 + c_2 \cdot e^{-1} \stackrel{!}{=} 2 \text{ und } y'(1) = -c_2 e^{-1} \stackrel{!}{=} 2$$

Also ist $c_2 = -2e$ und $c_1 = 2 + 2 \cdot e \cdot e^{-1} = 4$, d.h. die Lösung ist

$$y(x) = 4 - 2 \cdot e \cdot e^{-x} = 4 - 2 \cdot e^{1-x}.$$

2. Das homogene Problem ist

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Dieses hat die offensichtliche Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und es folgt mittels Polynomdivision

$$\text{chp}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1).$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x).$$

Es bleibt die partikuläre Lösung $y_p(x)$ zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 e^x,$$

denn $y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$ ist bereits eine homogene Lösung. Einsetzen liefert

$$4Ae^x = e^x.$$

Somit ist

$$y_p(x) = \frac{1}{4} x^2 e^x,$$

eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung $y(x)$ ist somit

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) + \frac{1}{4} x^2 e^x$$

Bitte wenden!

3. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \omega^2$ der homogenen Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ hat Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$x_h(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$$

ist. Der Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hängt von ν ab:

a) $\omega \neq \nu$: Wir machen den Ansatz $x_p(t) = C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t)$. Das liefert

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= -\nu C\sin(\nu t) + \nu D\cos(\nu t),\\ \ddot{x}_p(t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t).\end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\nu t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\sin(\nu t) &= -\nu^2 C\cos(\nu t) - \nu^2 D\sin(\nu t) + \omega^2(C\cos(\nu t) + D\sin(\nu t))\\ &= C(\omega^2 - \nu^2)\cos(\nu t) + D(\omega^2 - \nu^2)\sin(\nu t),\end{aligned}$$

d.h. $C = 0$ und $D = (\omega^2 - \nu^2)^{-1}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}\sin(\nu t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) + \frac{\nu}{\omega^2 - \nu^2}\cos(\nu t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Damit haben wir die Lösung:

$$x(t) = -\frac{\nu}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2 - \nu^2}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}\sin(\nu t)$$

b) $\omega = \nu$: Wir machen den Ansatz $x_p(t) = t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$. Das liefert

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= (C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)) + t\,(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)),\\ \ddot{x}_p(t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t)).\end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = \sin(\omega t)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\sin(\omega t) &= 2(-\omega C\sin(\omega t) + \omega D\cos(\omega t)) + t\,(-\omega^2 C\cos(\omega t) - \omega^2 D\sin(\omega t))\\ &\quad +\omega^2 t\,(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))\\ &= -2\omega C\sin(\omega t) + 2\omega D\cos(\omega t),\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

d.h. $C = -\frac{1}{2\omega}$ und $D = 0$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t).$$

Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ muss $A = 0$ sein. Mit der ersten Ableitung

$$\dot{x}(t) = \omega B\cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{t}{2}\sin(\omega t)$$

und $\dot{x}(0) = 0$ gilt ferner

$$B = \frac{1}{2\omega^2}.$$

Damit haben wir die Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$$

c) Abbildung 1 zeigt die berechneten Auslenkungen $x(t)$ für den Fall $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ (durchgehende Linie) bzw. $\omega = \nu = 1$ (gestrichelte Linie). Man erkennt, dass die Amplitude für $\omega \neq \nu$ beschränkt bleibt, wohingegen sie für $\omega = \nu$ mit der Zeit immer grösser wird. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Resonanzkatastrophe. Aus mathematischer Sicht ist der Term $\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$ in der Lösung von Teilaufgabe **b)** für diesen Effekt verantwortlich.

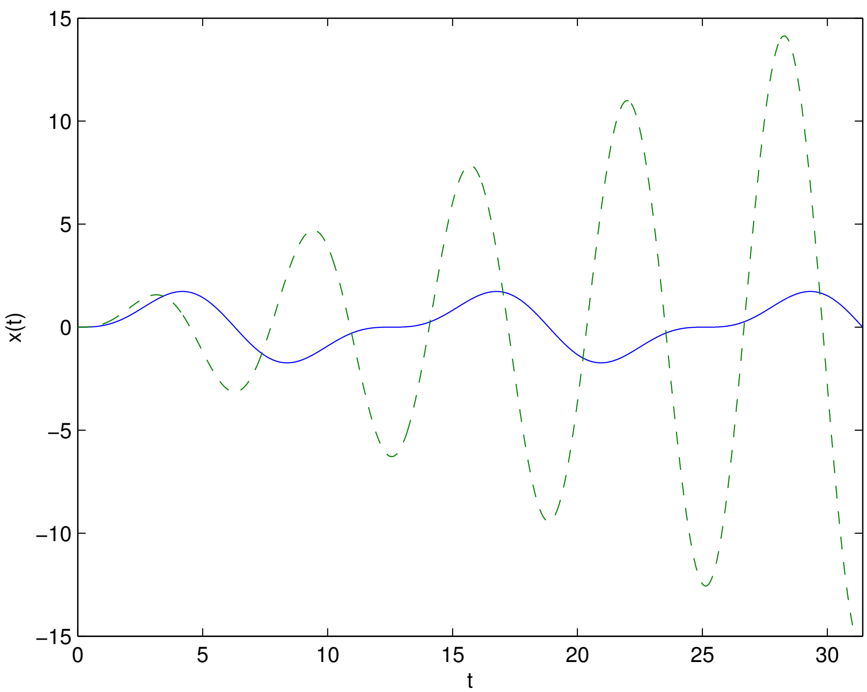

Abbildung 1: Auslenkungen $x(t)$ für $t \in [0, 10\pi]$

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass $y(x)$ eine Lösung von dieser Differentialgleichung ist. Definieren wir

$$x(t) := e^t \quad \text{für} \quad t > 0,$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y(x(t)) &= y'(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = y'(x(t)) e^t = y'(x(t)) x(t), \\
\frac{d^2}{dt^2} y(x(t)) &= \frac{d}{dt} \left(y'(x(t)) x(t) \right) = y''(x(t)) x(t) \frac{d}{dt} x(t) + y'(x(t)) \frac{d}{dt} x(t) \\
&= y''(x(t)) (x(t))^2 + y'(x(t)) x(t).
\end{aligned}$$

Da $y(x)$ ein Lösung der Differentialgleichung ist, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} y(x(t)) - 4 \frac{d}{dt} y(x(t)) + 8y(x(t)) &= y''(x(t))(x(t))^2 - 3y'(x(t))x(t) + 8y(x(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also löst die Funktion $h(t) := y(x(t))$ folgende Differentialgleichung

$$\ddot{h}(t) - 4\dot{h}(t) + 8h(t) = 0, \tag{2}$$

wobei $\dot{h}(t) = \frac{d}{dt} h(t)$ und $\ddot{h}(t) = \frac{d^2}{dt^2} h(t)$. Diese Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8.$$

Die Nullstellen von $\text{chp}(\lambda)$ sind

$$\lambda_1 = 2 - 2i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2 + 2i.$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung von (2) gegeben durch

$$h(t) = e^{2t} \left(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) \right).$$

Da $t = \ln(x)$ und $h(t) = y(x(t)) = y(e^t)$ folgt $y(x) = h(\ln(x))$. Die allgemeine Lösung von (1) ist somit

$$y(x) = x^2 \left(C_1 \cos(2\ln(x)) + C_2 \sin(2\ln(x)) \right),$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

b) Wir wählen den Ansatz $y(x) = x^\alpha$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 3x\alpha x^{\alpha-1} + 8x^\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 8\right) x^\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Das letzte Polynom heisst Indexpolynom der Eulerschen Differentialgleichung. Dessen Nullstellen sind:

$$\alpha_1 = 2 - 2i \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 2 + 2i.$$

Also sind x^{2+2i} und x^{2-2i} zwei linear unabhängige komplexe Lösungen. Wir erhalten zwei linear unabhängige reelle Lösungen, indem wir Real- und Imaginärteil von x^{2+2i} (oder x^{2-2i}) berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e(x^{2+2i}) = \mathcal{R}e\left(e^{\ln(x)(2+2i)}\right) &= \mathcal{R}e\left(e^{2\ln(x)}e^{2i\ln(x)}\right) \\ &= e^{2\ln(x)}\cos(2\ln(x)) \\ &= x^2\cos(2\ln(x)). \end{aligned}$$

Analog:

$$\mathcal{I}m(x^{2+2i}) = x^2\sin(2\ln(x)).$$

Also ist die allgemeine reelle Lösung

$$y(x) = C_1x^2\cos(2\ln(x)) + C_2x^2\sin(2\ln(x)),$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5. **a)** Für eine monoton steigende Funktion f gilt

$$\sup_{x\in I_k} f(x) = f(x_k) \text{ und } \inf_{x\in I_k} f(x) = f(x_{k-1}).$$

Also gilt

$$S_+(f,\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

und

$$S_-(f,\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Wenn die Zerlegung feiner wird, so wird $S_+(f, \mathcal{Z})$ kleiner. (Die Approximation von oben wird besser.) Ausserdem ist f von unten beschränkt durch $f(a)$ und für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ gilt $S_+(f, \mathcal{Z}) \geq (b-a)f(a)$. Also haben wir eine fallende "Folge", die von unten beschränkt ist. Somit ist sie konvergent. Analog ist $S_-(f, \mathcal{Z})$ eine steigende "Folge", welche von oben beschränkt ist (durch $(b-a)f(b)$). Somit konvergiert auch $S_-(f, \mathcal{Z})$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right) (x_{j+1} - x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(f(x_{j+1}) - f(x_j) \right) (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(f(x_{j+1}) - f(x_j) \right) \right) \delta(\mathcal{Z}) \\ &= (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{Z}). \end{aligned}$$

d) Aus c) folgt:

$$0 \leq \lim_{\sigma(\mathcal{Z}) \to 0} (S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z})) \leq (f(b) - f(a)) \lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} \delta(\mathcal{Z}) = 0,$$

also gilt

$$\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} (S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z})) = 0.$$

Wegen b) existieren $\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_+(f, \mathcal{Z})$ und $\lim_{\sigma(\mathcal{Z}) \to 0} S_-(f, \mathcal{Z})$ und es gilt

$$\lim_{\sigma(\mathcal{Z}) \to 0} S_+(f, \mathcal{Z}) - \lim_{\sigma(\mathcal{Z}) \to 0} S_+(f, \mathcal{Z}) = \lim_{\sigma(\mathcal{Z}) \to 0} (S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z})) = 0.$$

Somit ist f Riemann-integrierbar.