Musterlösung 12

1. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)dx &= \int \cos(x)\cos(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx + C \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int (1-\cos^2(x))dx + C \\ &= \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)dx + C.\end{aligned}$$

Definieren wir nun

$$K := \int \cos^2(x)dx$$

erhalten wir die Gleichung

$$2K = \sin(x)\cos(x) + x + C.$$

Lösen wir das nach K auf, erhalten wir also

$$K = \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x) + \tilde{C}.$$

2. Zuerst muss man bestimmen, wo $K_1(x) \geq K_2(x)$ bzw. $K_2(x) \geq K_1(x)$ gilt. Äquivalent dazu fragt man sich, wo $\sin x \geq \cos x$ bzw. $\cos x \geq \sin x$ ist. Man erhält:

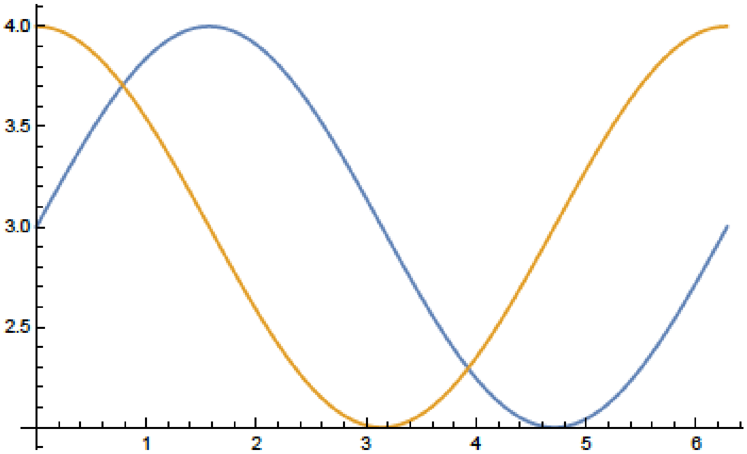
$$\sin x \geq \cos x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],$$

$$\cos x \geq \sin x \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

Dies entspricht den drei Regionen im Bild, welche von gelb, blau, der y-Achse und der vertikalen unsichtbaren Geraden $\{x = 2\pi\}$ eingeschlossen werden:

Bitte wenden!

```
Plot[{3 + Sin[x], 3 + Cos[x]}, {x, 0, 2 π}]
```



Deshalb folgt

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^{\pi/4} (3+\cos x - 3 - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (3+\sin x - 3 - \cos x)\,dx + \\
&+ \int_{5\pi/4}^{2\pi} (3+\cos x - 3 - \sin x)\,dx \\
&= (\cos x + \sin x)|_0^{\pi/4} - (\cos x + \sin x)|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\cos x + \sin x)|_{5\pi/4}^{2\pi} = \\
&= 4\sqrt{2}\,.
\end{aligned}
$$

3. Wir setzen $t = \sqrt{x}$ und bekommen $x = t^2$ und $dx = 2tdt$. Dann es folgt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx &= 2\left(\int \frac{t}{t+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\left(\int dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} \\
&= 2(t - \log|t+1|)_{t=\sqrt{x}} + C = 2(\sqrt{x} - \log(\sqrt{x}+1)) + C\,.
\end{aligned}
$$

Wir setzen die Bedingung

$$(2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + C)_{x=0} = 1$$

ein und erhalten somit $C = 1$. Es folgt

$$K(x) = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + 1\,.$$

4. **a)** Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt &= -\sin^2(t)e^{-t} + \int 2\cos(t)\sin(t)e^{-t}\,dt \\
&= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} + \int \left(-2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)\right)e^{-t}\,dt
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

Wenn wir auf beiden Seiten $4\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt$ addieren und die trigonometrische Identität $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$ benutzen, folgt

$$\begin{aligned} 5\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} + \int 2e^{-t}\,dt \\ &= -\sin^2(t)e^{-t} - 2\cos(t)\sin(t)e^{-t} - 2e^{-t} \end{aligned}$$

und somit

$$\int \sin^2(t)e^{-t}\,dt = -\frac{1}{5}\left(\sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + 2\right)e^{-t} + C$$

b) Wir erhalten mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \sinh(t)\cos(t)\,dt &= \cosh(t)\cos(t) + \int \cosh(t)\sin(t)\,dt \\ &= \cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t) - \int \sinh(t)\cos(t)\,dt \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral taucht auf beiden Seiten der Gleichung auf und wir können danach auflösen. Damit erhalten wir

$$\int \sinh(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\cosh(t)\cos(t) + \sinh(t)\sin(t)\right) + C.$$

c) Beachte, dass der Integrand nur für $t \in (0,1)$ wohldefiniert ist. Es macht also Sinn die Substitution $u^2 = t$ zu betrachten. Dann gilt $dt = 2u\,du$ und mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}}\,dt = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-u^2}\cdot 2u\,du = 2\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u}\,du$$

Wir formen den Integranden weiter um zu

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1-u^2}{1-u} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Für verbleibenden Ausdrücke kÃ¶nnen wir die Stammfunktionen direkt angeben. (Beim zweiten Audruck könnte man alternativ auch ähnlich wie in Teil (d) weiter substituieren, wenn man die Stammfunktion nicht direkt sieht.) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t-t}}\,dt &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 2\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\arcsin(u) - 2\sqrt{1-u^2} \\ &= 2\arcsin\left(\sqrt{t}\right) - 2\sqrt{1-t} + C \end{aligned}$$