D-ITET Analysis I HS 2018
Prof. Alessandra Iozzi

Musterlösung 13

1. **a)** Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x+1} + \frac{\omega_3}{x-1}$$

und erhalten

$$\omega_1(x^2-1) + \omega_2 x(x-1) + \omega_3 x(x+1) = 1\,,$$

d.h.

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_2 + \omega_3 = 0\,, \\ -\omega_1 = 1\,. \end{cases}$$

Die Lösungen des Systems sind

$$\omega_1 = -1\,, \;\; \omega_2 = \frac{1}{2}\,, \;\; \omega_3 = \frac{1}{2}\,,$$

und deshalb erhalten wir

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} \overset{\text{(PBZ)}}{=} -\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

b) Für den Nenner gilt

$$x^2 - 2x - 63 = (x+7)(x-9)$$

und daher bestimmen wir A, B so dass

$$\frac{4x-2}{(x+7)(x-9)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x+7}.$$

Wir erhalten

$$4x - 2 = A(x+7) + B(x-9).$$

Einsetzen von $x = -7$, bzw. $x = 9$ liefert

$$-30 = -16B \quad \Rightarrow B = 15/8$$

und

$$34 = 16 \cdot A \quad \Rightarrow A = 17/8.$$

Also gilt

$$\frac{4x-2}{x^2-2x-63} = \frac{17/8}{x-9} + \frac{15/8}{x+7}.$$

Bitte wenden!

c) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}\,.$$

Das liefert nun

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

und somit das System

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 1\,. \end{cases}$$

d.h. $a = 2$ und $b = -3$. Wir bekommen deshalb

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} \quad = \quad \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}.$$

d) Wir faktorisieren den Nenner und bekommen

$$(x^2-9)^2 = [(x-3)(x+3)]^2 = (x-3)^2(x+3)^2\,.$$

Weil die Nullstellen 3 und -3 Multiplizität 2 besitzen, folgt, dass wir den Ansatz

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$$

machen müssen, wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind.

Somit erhalten wir

$$\frac{A(x-3)(x+3)^2 + B(x+3)^2 + C(x-3)^2(x+3) + D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

und

$$(A+C)x^3+(3A+B-3C+D)x^2+(-9A+6B-9C-6D)x+(-27A+9B+27C+9D) = x^2\,,$$

was uns das System

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ 3A+B-3C+D = 1 \\ -9A+6B-9C-6D = 0 \\ -27A+9B+27C+9D = 0 \end{cases}$$

liefert. Das System besitzt die Lösungen

$$A = \frac{1}{12},\; B = \frac{1}{4},\; C = -\frac{1}{12},\; D = \frac{1}{4}$$

und deshalb ist die gesuchte Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{12(x-3)} + \frac{1}{4(x-3)^2} - \frac{1}{12(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

e) Zunächst zerlegen wir die gegebene rationale Funktion durch Polynomdivion in die Summe eines Polynoms $p(x)$ und eines rationalen Anteils $r(x)$, so dass der Grad des Zählers von $r(x)$ kleiner ist als der Grad des Nenners. Wir erhalten

$$(x^{10} - x^7 + 3x) : (x^3 - 1) = x^7 + \frac{3x}{x^3 - 1}\,.$$

Wir faktorisieren den Nenner von $r(x) = \frac{3x}{x^3-1}$ und bekommen

$$r(x) = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

In diesem Fall wird der Ansatz durch

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

gegeben. Somit erhalten wir

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c}{x^3-1}$$

und das System

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b + c = 3 \\ a - c = 0\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen

$$a = 1,\ b = -1,\ c = 1$$

sind. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{x^{10} - x^7 + 3x}{x^3 - 1} = x^7 + \frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+x+1}\,.$$

2. **a)** Mittels Partialbruchzerlegung aus der ersten Aufgabe berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{dx}{x^3 - x} &= -\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= -\ln x\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_{x=2}^{x=3} + \frac{1}{2}\ln(x-1)\Big|_{x=2}^{x=3} \\
&= -\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{2} = \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right) \\
&= \ln\sqrt{\frac{32}{27}}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Wir verwenden die Partialbruchzerlegung der ersten Aufgabe:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx &= \int \frac{17/8}{x-9}dx + \int \frac{15/8}{x+7}dx \\ &= \frac{17}{8}\log(|x-9|) + \frac{15}{8}\log(|x+7|) + c.\end{aligned}$$

c) Wir bekommen

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx \\ &= 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} + C.\end{aligned}$$

d) Mit der Partialbruchzerlegung folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\,dx &= \int \frac{1}{12(x-3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x-3)^2}\,dx \\ &\quad - \int \frac{1}{12(x+3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x+3)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{12}\log(|x-3|) - \frac{1}{4(x-3)} \\ &\quad - \frac{1}{12}\log(|x+3|) - \frac{1}{4(x+3)} + C\end{aligned}$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}\,dx &= \int x^7\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx + C_1.\end{aligned}$$

Um das letzte Integral zu berechnen, versuchen wir die Substitution $u = x^2 + x + 1$. Es gilt $\frac{du}{dx} = (2x+1)$. Wir teilen das Integral also wieder auf:

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Den ersten Teil können wir nun mithilfe der Substitution $u = x^2 + x + 1$ berechnen:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\log(|u|)+C_2 = -\frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|)+C_2.$$

Siehe nächstes Blatt!

Für den zweiten Teil, ergänzen wir quadratisch und benutzen Substitution:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx &= \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}\,dx \\
&= \sqrt{3}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv \\
&= \sqrt{3}\,\text{arctan}(v)+C_3 = \sqrt{3}\,\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)+C_3.
\end{aligned}$$

Wir schliessen daraus

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{8}x^8+\log(|x-1|)-\frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|) \\
+\sqrt{3}\,\text{arctan}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)+C
\end{aligned}$$

3. **a)** Diesem Integral begegnen wir mit einer Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{(x-5)(x-2)}\stackrel{!}{=}\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}.$$

Multiplikation mit $(x-5)(x-2)$ liefert

$$1=(x-2)A+(x-5)B=(A+B)x-2A-5B,$$

was zu $A=\frac{1}{3}$ und $B=-\frac{1}{3}$ führt. Also ist

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{dx}{x^2-7x+10} &= \int_3^4\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-5}-\frac{\frac{1}{3}}{x-2}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-5|\Big|_{x=3}^{x=4}-\frac{1}{3}\ln|x-2|\Big|_{x=3}^{x=4}=-\frac{2}{3}\ln 2.
\end{aligned}$$

b) Wir führen erneut eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x-1}{x(x^2-2)}=\frac{x-1}{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\stackrel{!}{=}\frac{A}{x}+\frac{B}{x-\sqrt{2}}+\frac{C}{x+\sqrt{2}}$$

$$\Longleftrightarrow x-1=A(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+Bx(x+\sqrt{2})+Cx(x-\sqrt{2}).$$

Nun setzen wir die „kritischen“ x-Werte ein:

- $x=0$:

$$-1=-2A\Longrightarrow A=\frac{1}{2},$$

Bitte wenden!

- $x = \sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} - 1 = 4B \Longrightarrow B = \frac{\sqrt{2}-1}{4},$$

- $x = -\sqrt{2}$:

$$-\sqrt{2} - 1 = 4C \Longrightarrow C = -\frac{\sqrt{2}+1}{4}.$$

Einsetzen der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x-1}{x(x^2-2)}\,dx &= \int_2^3 \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{2}-1}{4} \frac{1}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}+1}{4} \frac{1}{x+\sqrt{2}} \right) dx \\
&= \left(\frac{1}{2} \ln(x) + \frac{\sqrt{2}-1}{4} \ln(x-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}+1}{4} \ln(x+\sqrt{2}) \right) \Bigg|_2^3 \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{4} \ln(\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}) - \frac{\sqrt{2}+1}{4} \ln(\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Mit mehreren weiteren Rechenschritten erhält man ein leicht vereinfachtes Resultat:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x-1}{x(x^2-2)}\,dx &= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{4} \ln(\frac{(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}) \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}+1}{4} \ln(\frac{(3+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}) \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{4} \ln(\frac{4+\sqrt{2}}{2}) - \frac{\sqrt{2}+1}{4} \ln(\frac{4-\sqrt{2}}{2}) \\
&= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) + \frac{\sqrt{2}-1}{4}[\ln(4+\sqrt{2}) - \ln 2] \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}+1}{4}[\ln(4-\sqrt{2}) - \ln 2] \\
&= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\ln(4+\sqrt{2}) - \ln(-4+\sqrt{2})] \\
&\quad - \frac{1}{4}[\ln(4+\sqrt{2}) + \ln(4-\sqrt{2})] \\
&= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \ln[(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})] \\
&= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{18+8\sqrt{2}}{14} - \frac{1}{4} \ln 14 \\
&= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 14 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Es ist

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int\limits_3^4 \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \int\limits_2^3 \frac{du}{u^2+4} = \int\limits_1^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{2}\,dv}{v^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{3}{2} - \arctan 1\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{2} - \frac{\pi}{8},$$

wobei wir zuerst $u = x-1$ und dann $u = 2v$ substituiert haben.

d) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int t^3 \arctan(t)\,dt = \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int \frac{t^4}{t^2+1}\,dt.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

und erhalten somit

$$\int t^3\arctan(t)\,dt = \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{4}\int t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}t^4\arctan(t) - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\arctan(t) + C$$

e) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = \int (\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2})\,dt$$
$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + K = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + K.$$

f) Die Substitution $x = 4\sinh z$ ergibt $dx = 4\cosh z\,dz$ und folglich

$$\int \sqrt{x^2+16}\,dx = \int \sqrt{16\sinh^2 z + 16}\cdot 4\cosh z\,dz = 16\int \cosh^2 z\,dz$$
$$= 8\int (\cosh 2z + 1)\,dz = 4\sinh 2z + 8z + C$$
$$= 8\sinh z\cosh z + 8z + C$$
$$= 2x\cosh\bigl(\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4}\bigr) + 8\operatorname{Arsinh}\tfrac{x}{4} + C$$
$$= 2x\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 1} + 8\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4} + C$$
$$= \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+16} + 8\operatorname{Arsinh}\frac{x}{4} + C.$$

Bitte wenden!

Dabei haben wir die Relation

$$\cosh^2 z = \frac{1}{2}\left(\cosh(2z) + 1\right)$$

verwendet.

Bemerkung: Alternativ könnte man das obige Integral $I := \int \cosh^2 z \, dz$ auch mithilfe einer partiellen Integration berechnen:

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh^2 z \, dz = \sinh z \cosh z - \int \sinh^2 z \, dz \\ &= \sinh z \cosh z - \int (\cosh^2 z - 1) \, dz = \sinh z \cosh z - \int \cosh^2 z \, dz + z \\ &= \sinh z \cosh z + z - I, \end{aligned}$$

also

$$I = \frac{1}{2}\left(\sinh z \cosh z + z\right).$$