Musterlösung 4

1. a) Wir sehen

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi x+3}{x^2+\pi^2}=\frac{\pi^2-\pi^2+3}{\pi^2+\pi^2}=\frac{3}{2\pi^2}.$$

b) Wir faktorisieren und erhalten

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+19x-20}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}.$$

Da wir uns von rechts an 1 annähern, ist $(x-1)>0$. Somit erhalten wir weiter

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+20)}{|x-1|+(x-1)\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+20}{1+\sqrt{x}}=\frac{21}{2}.$$

c) Da der Sinus und der Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sin\{\pi\cos(\sin(x))\} &= \sin\left\{\pi\lim_{x\to 0}\cos(\sin(x))\right\}\\ &= \sin\left\{\pi\cos\left(\lim_{x\to 0}\sin(x)\right)\right\}\\ &= \sin\{\pi\cos(\sin(0))\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x+e}-\sqrt{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+e+x}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}=0\,.\end{aligned}$$

Da der Logarithmus auf ganz $(0,\infty)$ stetig ist, können wir den Grenzwert hineinziehen und erhalten

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left(e^2+\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}\right)=\log(e^2)=2\,.$$

Bitte wenden!

e) Es gilt $\lim_{x\to 100}(x-100)\sin\left(\frac{1}{x-100}\right) = \lim_{z\to 0} z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Da $\sin\left(\frac{1}{z}\right) \in [-1,1]$ für alle $z \neq 0$ und somit beschränkt ist, folgt unmittelbar, dass $\lim_{z\to 0} z\sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.

2. Mit der dritten binomischen Formel folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

3. (a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n > N(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definiere

$$M(\varepsilon) = \max_{1\leq k\leq N(\varepsilon)} |a_k - a|$$

Dann erhalten wir für $n > N(\varepsilon)$:

$$|s_n - a| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}(a_k - a)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \frac{N(\varepsilon)}{n}\cdot M(\varepsilon) + \frac{n-N_\varepsilon}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort

$$\limsup_{n\to\infty}|s_n - a| \leq \left(\lim_{n\to\infty}\frac{N(\varepsilon)M(\varepsilon)}{n}\right) + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-N(\varepsilon)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Insbesondere gibt es $N'(\varepsilon) > N(\varepsilon)$, sodass

$$|s_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N'(\varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Konvergenz von s_n gegen a.

(b) Betrachte als Beispiel $a_n = (-1)^n$. Dann gilt

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $|s_n| \leq \dfrac{1}{n}$ und folglich konvergiert s_n gegen 0.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Wir setzen zur Abkürzung $S(n) := \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$.

`Induktionsanfang:` $n = 1$.
Für $n = 1$ gilt offensichtlich $S(1) = 1 = \frac{(4\cdot 1^2-1)\cdot 1}{3}$.

`Induktions-Schritt:` $n \to n+1$.

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(4n^2-1)n + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3) \\ &= \frac{1}{3}(4(n+1)^3 - (n+1)) \\ &= \frac{(4(n+1)^2-1)(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen.

b) Wir halten k fest und beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach $n \geq k$.

`Induktionsanfang:` $n = k$.
Es gilt
$$\sum_{m=k}^{k} \binom{m}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}.$$

`Induktions-Schritt:` $n \to n+1$.
Es gelte die Behauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, dann ist

$$\binom{n+2}{k+1} = \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k}$$

zu bestätigen. Nun gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+2}{k+1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.