D-ITET
Prof. Alessandra Iozzi

Analysis I

HS 2018

Musterlösung 5

1. (i) *Verankerung* (P(1)): $1 - x_1 \geq 1 - x_1$.

(ii) *Induktionsschnitt* (P(n)⇒P(n+1)): Nehmen wir an, dass für jedes $n \geq 2$

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

und zeigen wir, dass

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \,.$$

Durch multiplizieren mal $(1 - x_{n+1})$ zu beiden Seiten die Aussage P(n+1) folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k)(1 - x_{n+1}) \\
&\geq \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1 - x_{n+1}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1} \\
&\geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \,.
\end{aligned}$$

2. **a)** Die Äquivalenz $x \leq M \Leftrightarrow -M \leq -x$ bedeutet, dass $-M$ genau dann eine untere Schranke für $-A$ ist, falls M eine obere Schranke für A ist. Insbesondere ist $M' = \sup A$ eine obere Schranke fÃ¼r A und es folgt dann mit der Eigenschaft des Infimums

$$\inf(-A) \geq -M' = -\sup A.$$

Bitte wenden!

Entsprechend ist $-M'' = \inf(-A)$ eine untere Schranke von $-A$ und es folgt aus der Eigenschaft des Supremums:

$$\sup(A) \leq M'' = -\inf(-A).$$

Beide Ungleichungen liefern zusammen die Behauptung $\inf(-A) = -\sup(A)$.

b) Nach Voraussetzung gilt $\inf(A) > 0$, also insbesondere $x > 0$ fÃ¼r alle $x \in A$. Für $M > 0$ und $x \in A$ haben wir dann die Äquivalent $x \leq M \Leftrightarrow M^{-1} \leq x^{-1}$. Ausgehend von dieser Äquivalenz, verläuft der Beweis völlig analog zu Teil (a).

3. Wir setzen einige Grenzwerte aus der Vorlesung als bekannt voraus. Diese sind aufgelistet und bewiesen im Königsberger, Kapitel 5.1: *Wichtige Folgen und Grenzwerte*.

(a) Da der Limes mit Addition und Division vertauscht werden kann, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

(b) Die Folge divergiert, da $|a_n - a_{n+1}| = 2n+1$. Genau genommen zeigt dieses Argument, dass die Folge keine Cauchy-Folge ist. In der Vorlesungen haben wir aber gesehen, dass jede konvergente Folge Cauchy ist.

(c) Wir erweitern mit der dritten binomischen Formel und erhalten:

$$0 \leq a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(d) Durch Vertauschen des Limes mit dem Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}{k!}\cdot\frac{n^k}{2^n} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) = 0
\end{aligned}$$

Den letzten Grenzwert setzen wir als bekannt voraus.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Denn mit $a_n := \frac{n!}{n^n}$ gilt für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{2} < 1\,, \end{aligned}$$

wobei wir die Bernoullische Ungleichung benutzt haben.

b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ konvergiert ebenfalls nach dem Quotientenkriterium. Denn mit $a_n := \frac{n^4}{3^n}$ gilt für alle $n \geq 4$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4 3^n}{3^{n+1} n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^4 < 1\,.$$

c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergiert. Denn für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}\,.$$

d) Auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ wenden wir das Leibnizsche Konvergenzkriterium an. Es ist

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n a_n$$

mit

$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}\,.$$

Wir haben zu zeigen, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^n} = \frac{((n+1)^2)^n}{(n(n+2))^n} \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n > 1\,, \end{aligned}$$

also ist $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend.