Musterlösung 6

1. **a)** Wir setzen $a_n := \frac{1}{(3n+1)^4}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)+1}{3n+1}\right)^4\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{3n+4}{3n+1}\right)^4\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^4\\ &= 1.\end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = 1$.

b) Wir setzen $a_n := (\ln(7n))^n$. Da der Koeffizient eine Potenz ist, bietet sich die Verwendung des Wurzelkriteriums für die Berechnung des Konvergenzradius an. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\ln(7n) = \infty$$

folgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = 0.$$

c) Wir setzen $a_n := \frac{1}{n\pi^n}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\pi^{n+1}}{n\pi^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\pi = \pi\,.\end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = \pi$.

d) Wir setzen $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2(n+1))!}{(2n)!((n+1)!)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!(n+1)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4\,.
\end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = 4$.

2. **a)** Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_{k+1} \\
&= a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)
\end{aligned}$$

b) Der Konvergenzradius ϱ ist nach dem Quotientenkriterium gegeben durch

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Folglich konvergiert die Potenzreihe absolut in dem Einheitskreis $\{|z|<1\}$ und divergiert auf $\{|z|>1\}$. Über das Konvergenzverhalten auf der Kreislinie $\{|z| = 1\}$ trifft das Quotientenkriterium keine Aussage.

Sei nun $|z| = 1$. Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert. Für $z = -1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Reihe für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert. Dazu verwenden wir die partielle Summationsregel aus (a) mit

$$a_k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1} = \frac{1-z^k}{1-z}, \qquad b_k = \frac{1}{k}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann gilt $a_{k+1} - a_k = z^k$ und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{z^{n+1}-1}{z-1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1-z^k}{1-z}. \tag{1}$$

Wir müssen zeigen, dass die rechte Seite für $n \to \infty$ konvergiert. Die Terme vor der Summe konvergieren offenbar gegen -1, da

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \right| \leq \frac{2}{|z-1|} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Hierbei haben wir $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} = 1$ und $z \neq 1$ benutzt. Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert sogar absolut, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1-z^k}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|z-1|} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2}{|z-1|}$$

Insbesondere konvergiert die rechte Seite in (1) mit $|z| = 1$, $z \neq 1$ für $n \to \infty$ und das zeigt die Behauptung.

3. **a)** $z = 41 + 11i$

b) $z = \frac{1}{29}(28 - 17i)$

c) $z = -i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

d) $z = -4(1+i)$

e) $z = \frac{1}{13}(6 - 35i)$

f) $z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} \right)$

f) ist nicht trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so dass

$$(a + ib)^2 = -1 + i. \tag{2}$$

(2) ist äquivalent zu

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ ab = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3}$$

also ($a \neq 0$ weil $-1 + i \notin \mathbb{R}$) gilt

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = -1$$

oder

$$a^4 + a^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Bitte wenden!

Somit gilt

$$a^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

aber $a^2 > 0$, also

$$a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

und (dank (3))

$$b = \frac{1}{2a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}.$$

4. Wir schreiben komplexe Zahlen als $z = x + \mathbf{i}y$.

a) Der senkrechte Streifen zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

b) Die Parabel $y^2 = 2x + 1$

c) Wir berechnen explizit die linke Seite als Ausdruck in x und y:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right|^2 = \frac{|z|^2}{|z+1|^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+2x+1+y^2}$$

Die Gleichung ist damit äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4(x^2+2x+1+y^2) = x^2+y^2 &\Leftrightarrow 3x^2+8x+4+3y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also der Kreis mit Radius $2/3$ um den Punkt $-4/3 + 0\mathbf{i}$ in der komplexen Zahlenebene.

d) Wenn wir die Gleichung explizit in x und y ausdrücken, erhalten wir:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 5$$

durch zweimaliges quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25 - 10\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 8x + 25 = 10\sqrt{(x+2)^2+y^2} \\ &\Rightarrow 64x^2 + 400x + 625 = 100(x^2+4x+4+y^2) \\ &\Leftrightarrow (6x)^2 + (10y)^2 = 15^2. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Lösungsmenge liegt also auf der Ellipse $(6x)^2 + (10y)^2 = 15^2$. Umgekehrt gilt, wenn (x, y) die ursprüngliche Gleichung erfüllt, dann erfüllen alle 4 Punkte $(\pm x, \pm y)$ ebenfalls die Gleichung. Wir können also $x \geq 0$ annehmen und dann gilt in obiger Rechnung auch die Rückrichtung. Somit liefert jeder Punkt auf dieser Ellipse auch eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Geometrisch sind -2 und $+2$ die Brennpunkte der Ellipse und die Summe der beiden Abstände eines Punktes auf der Ellipse zu den beiden Brennpunkten ist jeweils 5.

e) Da der Betrag einer komplexen Zahl reell ist gilt trivialerweise für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$

$$\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right| \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Im}\left(\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right|\right) = 0.$$

Die Lösungsmenge ist somit die gesammte komplexe Ebene.

f) Die Gleichung ist äquivalent zu:

$$|z-\mathbf{i}|^2 = |z+1|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow -2y = 2x$$

Die Lösungsmenge ist also die Gerade $y = -x$.

5. Sei $z = re^{i\vartheta} = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$. Wir wollen die Gleichung

$$z^5 = -\bar{z}$$

lösen. Wir setzen $z = r(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} r^5(\cos(5\vartheta) + i\sin(5\vartheta)) &= -r(\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta)) \\ &= r(-\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) \\ &= r(\cos(\pi-\vartheta) + i\sin(\pi-\vartheta)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt bekannte trigonometrische Formeln benutzt haben. Somit bekommen wir das System

$$\begin{cases} r^5 = r, \\ 5\vartheta = (-\vartheta + \pi) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{cases} r = 0; 1, \\ \vartheta = \frac{2k+1}{6}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Die Lösungen sind daher $z = 0$ und $z = \cos((2k+1)\pi/6) + i\sin((2k+1)\pi/6)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Bitte wenden!

6. Um die Gleichung zu lösen, setzen wir daher $z = a + ib$. Die Gleichung wird somit

$$a^2 + b^2 - (a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} + a + ib = 0\,.$$

Wir trennen den Realteil und den Imaginärteil und erhalten das System

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0\,, \\ -b\sqrt{a^2 + b^2} + b = 0\,, \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0\,, \\ b(1 - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0\,. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung bekommen wir zwei Systeme

$$\begin{cases} b = 0\,, \\ a^2 - a|a| + a = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} b \neq 0\,, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1\,, \\ 1 = 0\,. \end{cases}$$

Das zweite System besitzt keine Lösung. Das erste System besitzt die Lösungen $b = 0, a = 0$ und $b = 0, a = -1/2$. Die gesuchten Lösungen sind somit $z = 0$ und $z = -1/2$.