Musterlösung 7

1. Sei $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ der Konverganzradius der Potenzreihe.

a) Sei $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Es gilt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

also $R = e$.

b) Sei $a_n = \dfrac{n^a}{n!}$. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $R = \infty$.

c) Sei $a_n = \sqrt{2^n + 3^n}$. Es gilt

$$a_n = \left(\sqrt{3}\right)^n \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Also gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{3}\sqrt[2n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{3}$$

und $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

d) Sei $a_n = \dbinom{2n}{n}$. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 4,$$

also $R = \dfrac{1}{4}$.

Bitte wenden!

e) Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

und $R = 1$.

f) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ die Folge

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, und $R = 1$.

2. Wir wollen die Gleichung

$$\sinh(x) = y$$

nach y auflösen. Dafür setzen wir die Identität

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ein und erhalten

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

Nun multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $2e^x$ und erhalten

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x.$$

Wir substituieren nun $z := e^x$. Damit haben wir die Gleichung

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Da $z = e^x > 0$ ist, ist nur $z = y + \sqrt{y^2+1}$ die Lösung, welche uns interessiert. Damit ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$ gegeben durch

$$k^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** $a^0 = e^{0\log(a)} = e^0 = 1$. (Dabei folgt $e^0 = 1$ direkt aus der Definition der Exponentialfunktion.)

b) $a^1 = e^{1\log(a)} = e^{\log(a)} = a$. (Der Logaritmus ist per Definition die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.)

c) Aus der Eigenschaft $e^{u+v} = e^u e^v$ der Exponentialfunktion folgt

$$a^{z+w} = e^{(z+w)\log(a)} = e^{z\log(a)+w\log(a)} = e^{z\log(a)}e^{w\log(a)} = a^z a^w.$$

d) Wenn wir den Logarithmus von $a^x = e^{x\log(a)}$ bilden, erhalten wir die Rechenregel $\log(a^x) = x\log(a)$. Damit folgt

$$(a^x)^z = e^{\log(a^x)z} = e^{x\log(a)z} = a^{xz}.$$

e) Aus $e^{\log(ab)} = ab = e^{\log(a)}e^{\log(b)} = e^{\log(a)+\log(b)}$ folgt die Rechenregel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Damit erhalten wir

$$(ab)^z = e^{\log(ab)z} = e^{\log(a)z+\log(b)z} = e^{\log(a)z}e^{\log(b)z} = a^z b^z.$$

f) Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt sofort die Rechenregel $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$. Mit der Beziehung $|z|^2 = z\bar{z}$ erhalten wir

$$|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = \left(e^{\mathrm{Re}(z)}\right)^2$$

und folglich $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$. Hieraus folgt die allgemeine Regel:

$$|a^z| = \left|e^{\log(a)z}\right| = e^{\mathrm{Re}(\log(a)z)} = e^{\log(a)\mathrm{Re}(z)} = a^{\mathrm{Re}(z)}.$$

4. Für $x = 0$ sind die Summen trivalerweise gleich n bzw. 0. Da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ perodische Funktionen mit Periode 2π sind, können wir im folgenden $x \in (0, 2\pi)$ annehmen.

Mit der Eulerschen Formel (und $\sin(0) = 0$) folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + \mathbf{i}\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

oder mit anderen Worten

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx)\right), \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx)\right).$$

Bitte wenden!

Wir erhalten mit der Formel für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}kx) = \sum_{k=0}^{n} \exp(\mathbf{i}x)^k = \frac{1 - \exp(\mathbf{i}x)^{n+1}}{1 - \exp(\mathbf{i}x)}.$$

und umformen liefert

$$\begin{aligned}\frac{1 - \exp(\mathbf{i}x)^{n+1}}{1 - \exp(\mathbf{i}x)} &= \frac{e^{\mathbf{i}x\frac{n+1}{2}}\left(e^{-\mathbf{i}x\frac{n+1}{2}} - e^{\mathbf{i}x\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\mathbf{i}\frac{x}{2}}\left(e^{-\mathbf{i}\frac{x}{2}} - e^{\mathbf{i}\frac{x}{2}}\right)} = e^{\mathbf{i}\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)} \\ &= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. **a)** Fixiere $y > 0$ und sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$. Es gilt

$$\frac{d}{dy}\log(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

b) Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dy}\log(x^9) = \left(\frac{d}{dy}\log(y)\Big|_{y=x^9}\right)\frac{d}{dx}(x^9) = \frac{1}{x^9}9x^8 = \frac{9}{x}.$$

c) Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form

$$y = mx + b$$

gegeben, wobei $m = f'(e)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(e, f(e))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{9}{x}$$

und damit $m = f'(e) = \frac{9}{e}$. Aus $(e, f(e)) = (e, 9)$ folgt, dass b die Gleichung

$$9 = \frac{9}{e}e + b$$

erfüllt. Somit ist also $b = 0$. Also ist die Gleichung der Tangente

$$y = \frac{9}{e}x.$$