Musterlösung 8

1. **a)** Der Ausdruck $\log(\sin x)$ ist für $x \in (0, \pi)$ wohldefiniert, da dann $\sin(x) > 0$ gilt. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin(x))) = \frac{1}{\sin(x)} \sin'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

b) Wir schreiben $a^x = e^{x \log(a)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \log(a) e^{x \log(a)} = \log(a) a^x.$$

c) Es gilt $x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \left[\frac{d}{dx}(x \log x)\right] e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x) x^x.$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}) &= 7 \cdot 9x^6 + (-5)3x^{-6} - (-11)3x^{-12} \\ &= 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12}. \end{aligned}$$

e) Wir verwenden zuerst die Kettenregel und dann die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{(2x-3)(x^2-7x+12) - (x^2-3x+2)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2} \\ &= \frac{(x^2-7x+12)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-4x^2+20x-22)}{(x^2-7x+12)^2} \\ &= \frac{-2x^2+10x-11}{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

f) Mit den Beziehungen

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

und der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}(\log(\cosh x)) = \frac{\frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x.$$

g) Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{dx}(\log(\log(\log x))) = \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log(\log x)}.$$

h) Es gilt $a^b = e^{b \log a}$. Daher ist $3^x = e^{x \log 3}$ und es folgt

$$\frac{d}{dx}(3^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \log 3}) = (\log 3)e^{x \log 3} = (\log 3)3^x.$$

Mit der Produktregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}3^x x^3 &= 3^x \cdot 3x^2 + (\log 3)3^x x^3 \\ &= 3^x x^2(3 + x \log 3). \end{aligned}$$

i) Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\right] \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

Mit der Regel

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arctan(x-\sqrt{x^2+1}) &= \frac{1}{1+(x-\sqrt{x^2+1})^2}\left(1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1+(x-\sqrt{x^2+1})^2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}(1+(x-\sqrt{x^2+1})^2)} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}(1+x^2-2x\sqrt{x^2+1}+(x^2+1))} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}(-2x\sqrt{x^2+1}+2+2x^2)} \\
&= \frac{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)(x^2+1-x\sqrt{x^2+1})} \\
&= \frac{1}{2(x^2+1)}.
\end{aligned}
$$

2. Es ist klar, dass f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und dass für alle $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ gilt

$$
f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x<0\,, \\ c_k x^{n+1-k}, & \text{falls } x>0\,, \end{cases}
$$

wobei

$$
c_k = \prod_{m=n-k+2}^{n+1} m\,.
$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ auch in Nullpunkt existiert und dass gilt

$$
f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{für alle } k \in \{0,1,\cdots,n\}\ .
$$

Dann ist $f^{(k)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

`Induktionsanfang:` $k=0$.

Trivial, denn $f^{(0)}(0)=f(0)=0$.

`Induktionsschritt:` $k \to k+1, (k<n)$.

Wir haben zu zeigen, dass der Differenzenquotient

$$
\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}
$$

Bitte wenden!

für $x \to 0$ gegen Null konvergiert. Es ist

$$\left|\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0}\right| \leq \left|\frac{c_k x^{n-k+1}}{x}\right| = |c_k x^{n-k}|\,.$$

Da $n - k \geq 1$, strebt dies für $x \to 0$ gegen Null.

3. Aus der Definition erhalten wir direkt

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1} - 0}{h} = |h|^\alpha \frac{|h|}{h}\,,$$

d.h.

$$\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} = |h|^\alpha \operatorname{sign} h\,.$$

Deshalb existiert der Limes für h gegen Null genau dann, wenn $\alpha > 0$ ist. In diesem Fall bekommen wir

$$f'_\alpha(0) = \lim_{h\to 0} |h|^\alpha \operatorname{sign} h = 0\,.$$

4. **a)** Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{2,\ -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{array}{rcl} f(2) & = & -11, \\ f(-\frac{4}{3}) & = & \frac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) & = & 5. \end{array}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) \;=\; \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

ist, also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1 - \sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1 + \sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1 + \sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1 + \sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 + x - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\ f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\ f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\ f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.