Musterlösung 9

1. a) Aus der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für $|x| < 1$ folgt:

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k \text{ für } |x| < 2$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \text{ für } |x| < 3$$

b) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)} \\
&= \frac{1}{6}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{30}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{30}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6} + \frac{(-1)^k}{15\cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{10}\frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k.
\end{aligned}$$

c) Man kann die gesuchten Anfangsglieder der Taylorreihe durch wiederholtes Differenzieren der Funktion f berechnen. Wir wählen hier eine andere Möglichkeit. Die gegebene Funktion ist das Produkt zweier Funktionen mit bekannter Taylor-Entwicklung, $f(x) = g(x)h(x)$, wobei

$$g(x) := \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Bitte wenden!

und

$$h(x) := \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

Die Taylor-Entwicklung von f ergibt sich als Cauchy-Produkt dieser beiden Potenzreihen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,, \quad \text{mit } \; c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell \,,$$

wobei

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$$

und

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \cdot \frac{1}{\ell!} & \text{falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir $c_0 = 0$ und

$$c_1 = a_0 b_1 = \frac{1}{2} \,,$$

$$c_2 = a_1 b_1 = -\frac{1}{4} \,,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \,,$$

$$c_4 = a_1 b_3 + a_3 b_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{48} \,,$$

$$c_5 = a_0 b_5 + a_2 b_3 + a_4 b_1 = \frac{1}{240} - \frac{1}{48} + \frac{1}{32} = \frac{7}{480} \,.$$

Der Anfang der Taylor-Reihe der Funktion f lautet also

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{48} + \frac{7x^5}{480} + R_6(f,0)(x) \,.$$

2. Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\sin x = p_{2n+1}(\sin x, 0)(x) + R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) \,,$$

wobei

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

mit $\xi \in (0, x)$ ist.

Für $x = 1$ gilt somit

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(1) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

Siehe nächstes Blatt!

mit $\xi \in (0,1)$. Wir schätzen das Restglied mit

$$|R_{2n+1}(\sin x, 0)(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$$

ab. Weil wir einen Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ wollen, setzen wir die Bedingung

$$\frac{1}{(2n+2)!} < (100!)^{-1}$$

durch. Das ist äquivalent zu $2n+1 > 99$. Deshalb wird die Lösung der Aufgabe durch $2n+1 = 101$ gegeben.

Tatsächlich reicht schon $2n+1 = 99$. Dies kann man wie folgt sehen: Die Taylorreihe von $\sin x$ besteht nur aus Termen mit ungeraden Potenzen von x. Somit gilt

$$p_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = p_{2n+2}(\sin x, 0)(x),$$

also

$$R_{2n+1}(\sin x, 0)(x) = R_{2n+2}(\sin x, 0)(x).$$

Letzteres lässt sich schärfer abschätzen mit der Formel vom Restglied:

$$|R_{2n+2}(\sin x, 0)(1)| = \left|\frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Für $2n+1 = 99$ gilt also schon

$$|R_{2n+1}(\sin x, 0)(1)| = |R_{2n+2}(\sin x, 0)(1)| < (100!)^{-1}.$$

3. **a)** Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x) = e^{x^2+4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x+4)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 4^{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n+k} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \leq n \leq m} a_{n,m-n} \right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \leq n \leq m} \binom{n}{m-n} \frac{4^m}{n!} \right) x^m \end{aligned}$$

Bitte wenden!

mit

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{4^{n-k}}{n!}.$$

Beachten Sie, dass $a_{n,k} = 0$, falls $k > n$. Somit gilt die Gleichung (*), obwohl in der zweiten Summe Terme mit $k > n$ vorkommen und in der ersten Summe nur Terme mit $a_{n,k}$ und $k \leq n$.

b) Folglich gilt

$$e^{x^2-4} = g(x-2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \leq n \leq m} \binom{n}{m-n} \frac{4^m}{n!} \right) (x-2)^m$$

4. **a)** Definiere $f(x) = \log(1+x)$.

$n = 1$: $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x}$, also stimmt die Aussage für $n = 1$. (Wir verwenden die Konvention $0! = 1$.)

$n \geq 2$: Angenommen die Aussage gilt für $n-1$. Wir zeigen die Aussage für n. Berechne

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d^n x} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) &= \frac{d}{dx} (-1)^{n-2} (n-2)! \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \\ &= (-1)^{n-2} (n-2)! (-(n-1)) \frac{1}{(1+x)^n} \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Induktionsannahme benutzt.

b) Die Taylorreihe von $\log(1+x)$ ist somit

$$\begin{aligned} p_\infty(f,0)(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| &= \left| \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^n} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \left| \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^n} \right| \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Gleichung $\xi \geq 0$ und $x \leq 1$ benutzt haben.

Siehe nächstes Blatt!

d) Aus der Restgliedabschätzung für Taylorpolynome folgt

$$\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

für ein $0 \le \xi \le x$. Somit folgt aus der Abschätzung in c)

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \le \frac{1}{n+1}.$$

e) Da $\frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

für $0 \le x \le 1$. Insbesondere folgt für $x = 1$

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$