D-ITET | Analysis I | HS 2018
Prof. Alessandra Iozzi

Lösungen Quiz 10

Version A

Was ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 1?$$

(a) $c_1 e^{3x} + \frac{1}{9}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{1}{9}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $c_1 e^{3x} + 9e^{3x}$, wobei $c_1 \in \mathbb{R}$.

(d) $c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 9$.

Lösung: (b)
Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$. Es hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 3$. Somit ist die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Als Ansatz für die Lösung des inhomogenen Problems wählt man $u_p(x) = A$, wobei A eine Konstante ist. Einsetzen von u_p in die DGl. und Koeffizientenvergleich ergibt $A = \frac{1}{9}$. Also ist die allgemeine Lösung $c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{1}{9}$.

Version B

Was ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u'''(x) + u'(x) = 1?$$

(a) $c_1 e^{x} + c_2 \cos(ix) + c_3 \sin(ix) + 1$, wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

(b) $c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + x$, wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c) $c_1 + c_2e^{ix} + e^{-ix} + x$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) + x$, wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Lösung: (d)
Das charakteristische Polynom ist $\lambda^3 + \lambda = (\lambda - i)(\lambda + i)\lambda$. Die Nullstellen sind $\lambda = 0, i, -i$. Somit ist die allgemeine komplexe Lösung des homogenen Problems

$$d_1 + d_2e^{ix} + d_3e^{-ix},$$

wobei $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$. Die allgemeine reelle Lösung ist $c_1 + c_2\cos(3x) + c_3\sin(3x)$ wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Als Ansatz für die Lösung des inhomogenen Problems wählt man $u_p(x) = Ax$, wobei A eine Konstante ist. Einsetzen von u_p in die DGl. und Koeffizientenvergleich ergibt $A = 1$. Also ist die allgemeine Lösung $c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) + x$.

Version C

Was ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u''(x) - 2u'(x) + 2u(x) = 1?$$

(a) $c_1e^{(1+i)x} + c_2e^{(1-i)x} + \frac{1}{2}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $c_1e^x + c_2e^{-x} + 2$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $c_1e^x\cos(x) + c_2e^x\sin(x) + \frac{1}{2}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{1}{2}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Lösung: (c)
Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - (1+i))(\lambda - (1-i))$. Die Nullstellen sind $\lambda = 1 \pm i$. Somit ist die allgemeine komplexe Lösung des homogenen Problems

$$d_1e^{(1+i)x} + d_2e^{(1-i)x},$$

wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Die allgemeine reelle Lösung ist $c_1e^x\cos(x) + c_2e^x\sin(x)$ wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Als Ansatz für die Lösung des inhomogenen Problems wählt man $u_p(x) = A$, wobei A eine Konstante ist. Einsetzen von u_p in die DGl. und Koeffizientenvergleich ergibt $A = \frac{1}{2}$. Also ist die allgemeine Lösung $c_1e^x\cos(x) + c_2e^x\sin(x) + \frac{1}{2}$.