Lösungen Quiz 12

Version A

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \int_{-1}^{\frac{1}{x}} \cos(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung von f?

(a) $f'(x) = -\sin(\frac{1}{x})$.

(b) $f'(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$.

(c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$.

(d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(x)$.

Lösung: (c)
Sei $g(y) = \int_{-1}^{y} \cos(t)\,dt$. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt $g'(y) = \cos(y)$. Es gilt $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Die Kettenregel liefert also $f'(x) = g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = \cos(\frac{1}{x})\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Version B

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \int_1^{2x} \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung von f?

(a) $f'(x) = 2\sin(2x)$.

(b) $f'(x) = 2x\sin(x)$.

(c) $f'(x) = -\cos(2x)$.

(d) $f'(x) = 2x\cos(x)$.

Bitte wenden!

Lösung: (a)
Sei $g(y) = \int_1^y \sin(t)\,dt$. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt $g'(y) = \sin(y)$. Es gilt $f(x) = g(2x)$. Die Kettenregel liefert also $f'(x) = g'(2x)(2x)' = \sin(2x)2 = 2\sin(2x)$.

Version C

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \int_2^{x^2} \cos(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung von f?

(a) $f'(x) = \cos(x^2)$.

(b) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.

(c) $f'(x) = \sin(x^2)$.

(d) $f'(x) = x^2\sin(x)$.

Lösung: (b)
Sei $g(y) = \int_2^y \cos(t)\,dt$. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt $g'(y) = \cos(y)$. Es gilt $f(x) = g(x^2)$. Die Kettenregel liefert also $f'(x) = g'(x^2)(x^2)' = \cos(x^2)2x$.