

Lösungen Quiz 5

Version A

Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$A = \left\{ \frac{x}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

zu?

- (a) 1 ist das Supremum von A .
- (b) 1 ist das Maximum von A .
- (c) -1 ist das Infimum von A .
- (d) 0 ist das Infimum von A .

Lösung: (a) und (c)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \frac{x}{1 + |x|} \right| < 1.$$

Weiter gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + |x|} = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + |x|} = -1$. Somit ist 1 das Supremum, allerdings kein Maximum und -1 ist das Infimum, allerdings kein Minimum.

Version B

Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$A = \left\{ \frac{|x|}{1 + x} : x \in \mathbb{R}, x > -1 \right\}$$

zu?

Bitte wenden!

- (a) ∞ ist das Supremum von A .
- (b) 1 ist das Supremum von A .
- (c) 0 ist das Infimum von A .
- (d) 0 ist das Minimum von A .

Lösung: (a), (c) und (d)

Es gilt für alle $x > -1$:

$$\frac{|x|}{1+x} \geq 0$$

und $0 \in A$ (setze $x = 0$). Also ist 0 Infimum und Minimum von A . Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+|x|} = \infty,$$

somit ist ∞ das Supremum von A .

Version C

Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$A = \left\{ \frac{x}{1+x} : x \in \mathbb{R}, x < -1 \right\}$$

zu?

- (a) ∞ ist das Supremum von A .
- (b) 1 ist das Supremum von A .
- (c) 1 ist das Infimum von A .
- (d) 1 ist das Minimum von A .

Lösung: (a) und (c)

Für $x > -1$ gilt

$$\frac{x}{1+x} > 1.$$

Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1+x} = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Somit ist 1 ein Infimum, aber kein Minimum und ∞ ist das Supremum von A .