D-ITET | Analysis I | HS 2018
Prof. Alessandra Iozzi

Lösungen Quiz 6

Die Lösungen von $z^n = re^{i\alpha}$ ($r > 0, \alpha \in \mathbb{R}$) sind genau die komplexen Zahlen der Form

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\alpha + 2\pi i k}{n}}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Beachte, dass $w_0, \cdots, w_{n-1}$ alle verschieden sind und sich diese n Lösungen periodisch wiederholen: $w_k = w_{k+n}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also genügen zum Beispiel $k = 0, \cdots, n-1$, aber auch $k = 1, \cdots, n$, um die Lösungsmenge anzugeben.

Version A

Was ist die komplexe Lösungsmenge der Gleichung

$$z^9 = \frac{i}{2} \ ?$$

(a) $\sqrt[9]{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{18} + \frac{2\pi i k}{9}}$ für $k = 1, \cdots, 9$.

(b) $\sqrt[9]{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}\right)\right)$ für $k = 0, \cdots, 8$.

(c) $\sqrt[9]{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{18}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{18}\right)\right)$ für $k = 0, \cdots, 8$.

(d) $\sqrt[9]{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{18} + \frac{2\pi i k}{9}}$ für $k = 0, \cdots, 8$.

Lösung: (a) und (b) und (d).
Schreibe $\frac{i}{2}$ in Polarform:

$$\frac{i}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Die $n-$ten Wurzeln sind also

$$w_k = \sqrt[9]{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{18} + \frac{2\pi i k}{9}}.$$

Bitte wenden!

Sowohl die Beschränkung auf $k = 0, \cdots, 8$, als auch die Beschränkung auf $k = 1, \cdots, 9$ liefern die gesamte Lösungsmenge. Also sind (a) und (d) wahr. Weiter gilt (b), aufgrund der Identität $e^{i\alpha} = cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

Version B

Was ist die komplexe Lösungsmenge der Gleichung

$$z^7 = -2 \ ?$$

(a) $\sqrt[7]{2}e^{\frac{\pi i}{14}+\frac{2\pi ik}{7}}$ für $k = 0, \cdots, 6$.

(b) $\sqrt[7]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{14}\right)\right)$ für $k = 0, \cdots, 6$.

(c) $\sqrt[7]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{7}\right)\right)$ für $k = 0, \cdots, 6$.

(d) $\sqrt[7]{2}e^{\frac{\pi i+2\pi ik}{7}}$ für $k = 1, \cdots, 7$.

Lösung: (c) und (d)
Schreibe -2 in Polarform:

$$-2 = 2e^{i\pi}.$$

Die $n-$ten Wurzeln sind also

$$w_k = \sqrt[7]{2}e^{\frac{\pi i+2\pi ik}{7}}.$$

Sowohl die Beschränkung auf $k = 0, \cdots, 6$, als auch die Beschränkung auf $k = 1, \cdots, 7$ liefern die gesamte Lösungsmenge. Also ist (d) wahr. Weiter gilt (c), aufgrund der Identität $e^{i\alpha} = cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

Version C

Was ist die komplexe Lösungsmenge der Gleichung

$$z^8 = i \ ?$$

(a) $e^{\frac{\pi i}{16}+\frac{\pi ik}{4}}$ für $k = 0, \cdots, 7$.

(b) $\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}\right)$ für $k = 0, \cdots, 7$.

Siehe nächstes Blatt!

(c) $\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{8}\right)$ für $k = 0, \cdots, 7$.

(d) $e^{\frac{\pi i+2\pi ik}{8}}$ für $k = 1, \cdots, 8$.

Lösung: (a) und (b)
Schreibe i in Polarform:

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Die $n-$ten Wurzeln sind also

$$w_k = e^{\frac{\pi i}{16}+\frac{2\pi ik}{8}}.$$

Die Beschränkung auf $k = 0, \cdots, 7$ liefert die gesamte Lösungsmenge. Also ist (a) richtig. Weiter gilt (b), aufgrund der Identität $e^{i\alpha} = cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.