Lösungen Quiz 8

Version A

Welche der folgenden Funktion besitzt kein Maximum?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x^2}|x|.$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{|x|}{|x|+1}.$

Lösung: (c)
Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = 0$ und f_1 nimmt für $|x| > 0$ positive Werte an. Also ist für jedes hinreichend grosse Intervall das dort wegen der Stetigkeit von f_1 angenommene Maximum schon ein globales Maximum.

Zweitens gilt $f_2(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2}$. Der Ausdruck wird maximal, wenn der Nenner des Bruchs minimal wird, also genau für $x = 0$. Also ist der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f_2.

Drittens gilt $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{|x|+1} = 1$ and

$$\frac{|x|}{|x|+1} < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also besitzt f_3 kein Maximum.

Bitte wenden!

Version B

Welche der folgenden Funktion besitzt kein Maximum?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1-x^4}{1+x^4}$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto 1 - x^2$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x}|x|$.

Lösung: (c)
Es gilt $f_1(x) = -1 + \frac{2}{1+x^4}$. Der Ausdruck wird maximal, wenn der Nenner des Bruchs minimal wird, also genau für $x = 0$. Also ist der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f_1.

Zweitens hat f_2 in 0 ein globales Maximum (die Funktion ist fallend für $x > 0$ und steigend für $x < 0$).

Drittens gilt $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}|x| = \infty$ und deshalb existiert kein Maximum.

Version C

Welche der folgenden Funktion besitzt kein Maximum?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-|x|}\cos(x)$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^3-x}{x^2+2}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x^2}$.

Lösung: (b)
Für $x \neq 0$ gilt $0 < e^{-|x|} < 1$ und $\cos(x) \leq 1$ und damit $f_1(x) < 1$. Wegen $f_1(0) = 1$ ist also der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f_1.

Es gilt $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$. Also existiert kein Maximum.

Drittens hat f_3 in 0 ein globales Maximum (die Funktion ist fallend für $x > 0$ und steigend für $x < 0$).