D-ITET
Prof. Alessandra Iozzi

Analysis I

HS 2018

Lösungen Quiz 9

Version A

Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ dar?

(a) $(1-x)^{-1}$.

(b) $(1-x)^{-2}$.

(c) $-(1-x)^{-2}$.

(d) $x \cdot (1-x)^{-2}$.

(e) $x \cdot (1-x)^{-3}$.

Lösung: (b)
Wir benutzen die Ableitung und die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(x^{k+1})' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\right)' \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k}\right)' \\ &= ((1-x)^{-1}-1)' = (1-x)^{-2}.\end{aligned}$$

Version B

Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!}$ dar?

(a) $\exp(-x)$.

Bitte wenden!

(b) $-\exp(x)$.

(c) $k\exp(x)$.

(d) $x\exp(x)$.

(e) $\exp(x)$.

Lösung: (e)
Wir benutzen die Ableitung und die Exponentialreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x^k\right)'}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \exp(x)' = \exp(x).$$

Version C

Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k+1}$ dar?

(a) $(1-x)^{-2}$.

(b) $x \cdot (1-x)^{-2}$.

(c) $-x \cdot (1-x)^{-2}$.

(d) $x^2 \cdot (1-x)^{-2}$.

(e) $-x^2 \cdot (1-x)^{-3}$.

Lösung: (d)
Wir benutzen die Ableitung und die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^2kx^{k-1} &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' \\ &= x^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \\ &= x^2((1-x)^{-1})' = x^2 \cdot (1-x)^{-2}.\end{aligned}$$