Musterlösung Schnellübung 1

1. Wir brauchen nur zu schauen, für welche $x \in \mathbb{R}$ der Nenner $x^2 + x - \pi$ Null wird. Für diese x ist die Funktion

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-2|^3 - 2}{x^2 + x - \pi}\right)$$

nicht definiert. Wir lösen also

$$x^2 + x - \pi = 0$$

und erhalten

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi}}{2}.$$

Also ist f definiert auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$.

2. **a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = n + 1 = 2k + 1\,.$$

Falls andererseits n ungerade ist, d.h. $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$(-1)^n n + \cos(n\pi) = -n - 1 = -2k\,.$$

Wir schliessen daraus

$$K_1 = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-2k : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

b) Mit Aufgabe **a)** kann man K_2 umschreiben:

$$K_2 = \{\cos((2k+1)\pi) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos((-2k)\pi) : k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Daher erhält man sofort

$$K_2 = \{-1\} \cup \{1\} = \{-1, 1\}.$$

Bitte wenden!

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{-2}{n\pi} = \frac{-1}{k\pi} .$$

Falls n ungerade und in der Form $n = 4k + 1$ mit $k \geq 0$ ist, dann bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(4k+1)^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos((4k+1)\pi)}{4k+1} \\ &= \frac{2}{(4k+1)\pi} \left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1 \right) . \end{aligned}$$

Falls schliesslich n ungerade und in der Form $n = 4k + 3$ mit $k \geq 0$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\pi)}{n} &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}{(4k+3)^2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos((4k+3)\pi)}{4k+3} \\ &= \frac{2}{(4k+3)\pi} \left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1 \right) . \end{aligned}$$

Wir setzen

$$G := \left\{ \frac{-1}{k\pi} : k \geq 1 \right\} ,$$

$$V_1 := \left\{ \frac{2}{(4k+1)\pi} \left(\frac{2}{(4k+1)\pi} + 1 \right) : k \geq 0 \right\}$$

und

$$V_2 := \left\{ \frac{2}{(4k+3)\pi} \left(\frac{-2}{(4k+3)\pi} + 1 \right) : k \geq 0 \right\} .$$

Dann gilt

$$K_3 = G \cup V_1 \cup V_2 .$$

3. a) Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $f(x) = y$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x) = g(y) = z$ und da $z \in Z$ beliebig war, ist $g \circ f$ surjektiv.

b) Seien $x_1 \neq x_2 \in X$. Da f injektiv ist, folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da g ebenfalls injektiv ist, folgt $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Insbesondere gilt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$ in X und somit ist $g \circ f$ injektiv.

c) Sei $z \in Z$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $(g \circ f)(x) = z$. Insbesondere gilt $g(f(x)) = z$ und folglich ist $f(x) \in Y$ ein Urbild von z unter g. Da z beliebig war, ist g surjektiv.

Siehe nächstes Blatt!

d) Wir beweisen die Behauptung indirekt und zeigen: „Wenn f *nicht* injektiv ist, dann ist auch $g \circ f$ *nicht* injektiv.“ Dies ist formal äquivalent zu der Aussage aus der Aufgabe. Wenn f nicht injektiv ist, dann gibt es $x_1 \neq x_2$ sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$. Also ist $(g \circ f)$ ebenfalls nicht injektiv.

4. **a)** Seien

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} a_k, \quad g(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

Dann gilt

$$g(n) = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} a_{k-1}} = \frac{f(n)}{\prod_{j=0}^{n-1} a_j} = \frac{1}{a_0}\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{a_n}{a_0}.$$

b) Es gilt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Unter Verwendung von

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

folgern wir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$