Musterlösung Schnellübung 2

1. Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

2. **a)** Wir bezeichnen die linke bzw. rechte Seite der zu beweisenden Gleichung mit

$$LS(n) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

$$RS(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Der *Induktionsanfang* $n = 0$ ist klar, da $LS(0) = 0$ und $RS(0) = 0$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$. Wir berechnen jeweils die Differenzen

$$LS(n+1) - LS(n) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

und

$$\begin{aligned} RS(n+1) - RS(n) &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Da diese Differenzen gleich sind, und nach Induktions-Voraussetzung $LS(n) = RS(n)$, folgt $LS(n + 1) = RS(n + 1)$.

b) *Induktionsanfang:* Für $n = 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{7}{9}$$

was dasselbe ist wie

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2^2+2+1}{2(2+1)}.$$

Bitte wenden!

Induktionsschritt: Wir wollen zeigen, dass

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(n+1)^2+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$$

gilt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} \\ &= \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder im zweiten Schritt die Induktionsverankerung verwendet haben. Wir schreiben nun

$$(n+1)^3 - 1 = n(n^2+3n+3) \text{ und } (n+1)^3+1 = (n^2+n+1)(n+2).$$

Durch Einsetzen und Kürzen erhalten wir dann direkt

$$\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2},$$

was zu beweisen war.

c) Wir zeigen per Induktion, dass beide Seiten gleich

$$A(n) := \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$$

sind.
Schritt 1:

$$1+2+\cdots+n = \frac{(n+1)n}{2}. \qquad B(n)$$

Für $n = 1$ ist die Gleichung wahr. Sei $n \geq 2$. Angenommen $B(n-1)$ gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= (1+2+\cdots+(n-1))+n \\ &= \frac{n(n-1)}{2}+n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt $B(n)$. Somit gilt auch $(1+2+\cdots+n)^2 = A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Siehe nächstes Blatt!

Schritt 2:

$$1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 = A(n). \qquad C(n)$$

Für $n = 1$ ist die Gleichung wahr. Sei $n \geq 2$. Angenommen $C(n-1)$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
1^3 + \cdots + n^3 &= 1^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \\
&= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + n^3 \\
&= \frac{n^2(n^2 - 2n + 1) + 4n^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Also gilt $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Nach Definition wissen wir:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ heisst, dass für alle $M > 0$ ein $R > 0$ mit

$$x > R \Rightarrow f(x) < -M$$

  existiert.

Wegen $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ folgt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{c} = 1$. Nach Definition:

- $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ heisst, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $R' > 0$ mit

$$|\frac{g(x)}{c} - 1| < \varepsilon$$

  existiert.

Wir müssen nun zeigen, dass $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = -\infty$, d.h. dass für alle $N > 0$ ein $R'' > 0$ existiert mit $(x > R'' \Rightarrow f(x)g(x) < -N)$. Wir wählen dafür $M = \lceil \frac{2}{c} \rceil N$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$, und finden dafür R, $R' > 0$ mit

$$x > R \Rightarrow f(x) < -M = -\lceil \frac{2}{c} \rceil N, \text{ und } \quad x > R' \Rightarrow |\frac{g(x)}{c} - 1| < \frac{1}{2}.$$

Die letzte Ungleichung impliziert

$$\frac{g(x)}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) > \frac{c}{2}.$$

Bitte wenden!

Wir setzen nun

$$R'' := \max\{R, R'\} > 0.$$

Dann gilt für $x > R''$, dass

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &< f(x)\frac{c}{2} \\ &< -\lceil\frac{2}{c}\rceil N\frac{c}{2} \\ &< -\frac{2}{c}N\frac{c}{2} \\ &< -N. \end{aligned}$$

In der ersten Ungleichung, haben wir verwendet, dass $f(x) < 0$.

b) (i) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{falls } x \geq 1; \\ -1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

(ii) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{falls } x \geq 1; \\ -1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

(ii) $f(x) = -x^2$ und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & \text{falls } x \geq 1; \\ 1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$