Musterlösung Schnellübung 3

1. **a)** Da $\left|\frac{3+4i}{5}\right| = 1$ erhalten wir

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\left(\frac{3+4i}{5} - 1\right)\right| = \left|\frac{3+4i}{5} - 1\right| = \frac{1}{5}\sqrt{20}.$$

Die Folge ist also nicht Cauchy und somit kann sie nicht konvergieren.

b) Wir schätzen ab

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leq a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 5$$

Da $\sqrt[n]{3}$ gegen 1 konvergiert, folgt aus dem Sandwich-Theorem, dass a_n gegen 5 konvergiert.

c) Wir schätzen ab

$$1 \leq a_n = \sqrt[n]{7n^6 + 2n^2 + 1} \leq \sqrt[n]{10n^6} = \sqrt[n]{10} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^6$$

Somit konvergiert a_n gegen 1, da sowohl $\sqrt[n]{10}$ als auch $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergieren.

d) Wir verwenden, dass $\frac{n^{2017}}{2^n}$ gegen 0 konvergiert, um den Limes zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n^{2017}}{2^n + n^{2017}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n^{2017}}{2^n}}{1 + \frac{n^{2017}}{2^n}} = 1.$$

2. **a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass die Funktionen $x \mapsto nx$ und $x \mapsto 1 + |nx|$ auf $\mathbb{R}$ stetig sind. Also ist auch die Funktion

$$x \mapsto K_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}$$

stetig, da der Nenner nirgends verschwindet. Für $n \geq 1$ erhält man

$$K_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|}.$$

Also gilt für $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0\,, \\ -1, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n(0) = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} K_n(0) = 0\,.$$

Es ist $K(x) := \lim_{n\to\infty} K_n(x)$, also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. In jedem Punkt $a \neq 0$ ist K stetig, da

$$\lim_{x\to a} K(x) = K(a)\,.$$

Im Nullpunkt ist K aber nicht stetig, da zum Beispiel

$$\lim_{x\to 0^+} K(x) = 1 \neq K(0) = 0\,.$$

Wir haben also hier eine Folge stetiger Funktionen, die gegen eine unstetige Funktion konvergiert.

b) Sei $x \neq 0$. Von oben wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = \frac{x}{|x|} \neq 0$ ist, und daher ist die benötigte Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt.

Sei nun $x = 0$. Noch einmal wissen wir von oben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $K_n(0) = 0$ gilt. Es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} K_n(0) = 0$.

Wir schliessen daraus, dass der Konvergenzbereich nur der Punkt 0 ist.

3. Sei $z = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Wir erhalten direkt

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2.$$

b) Es gilt

$$z + \bar{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\Re(z).$$

c) Es ist

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

4. Wir setzen

$$z := -1 + \sqrt{3}i$$

und erhalten sofort, dass $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$ sind. Somit gilt $z = 2e^{i2\pi/3}$ und $z^7 = 2^7 e^{i14\pi/3}$. Die komplexen Wurzeln von z^7 sind also gegeben durch

$$w_k = \sqrt[7]{2^7} e^{i\left(\frac{14\pi/3 + 2k\pi}{7}\right)} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \quad k = 0, \cdots, 6\,.$$